

الدوال الأصلية

-1 تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I . نقول أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :
 F دالة قابلة للاشتقاق على المجال I .
ولكل x من I : $F'(x) = f(x)$

مثال :

-1 لتكن $F(x) = x^2 + x + 1$
إذن : $F'(x) = 2x + 1$
إذن : الدالة F هي دالة أصلية للدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 2x + 1$

-2 حدد دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية :

-a $f(x) = 2$
 $F(x) = 2x + C / C \in \mathbb{R}$

-b $f(x) = x$
 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$

-c $f(x) = x^3$
 $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$

-d $f(x) = x^n / n \in \mathbb{N}^*$
 $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

-e $f(x) = x^r ; r \in \mathbb{N}^* - \{-1\}$
 $F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$

-f $f(x) = \sqrt{x}$
 $= x^{\frac{1}{2}}$
 $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + Cte$

-g $f(x) = (x^2 + 1)^3 (2x)$
 $F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + Cte$

الأصلية : $u^r \cdot u' : \frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$

-2- خاصية :

لتكن f دالة عددية.
إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن مجموعة الدالة الأصلية للدالة f على I هي :
 $F + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

برهان :

لتكن F دالة أصلية للدالة f على I و λ عدد حقيقي.
لدينا : $(F + \lambda)' = F' = f$
إذن : $F + \lambda$ هي أيضا دالة أصلية للدالة f على I .
ومنه : مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هي $F + \lambda$.

-3- خاصية :

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على I .
ليكن x_0 من I و y_0 عنصر حقيقي $y_0 \in \mathbb{R}$.
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على I .
حيث : $F(x_0) = y_0$

أمثلة :

حدد الدالة الأصلية للدالة f والتي تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$.

-1 $f(x) = x + 1$ $F(2) = 1$

لدينا : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C = 1$

وبما أن : $F(2) = 1$

فإن : $\frac{1}{2}x^2 + x + C = 1$

ومنه : $2 + 2 + C = 1$
 $C = -3$

-2 $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ $F(0) = 0$

لدينا : $F(x) = 2 \text{ Arc tan } x + C$

وبما أن : $F(0) = 0$

فإن : $C = 0$

إذن : $F(x) = 2 \text{ Arc tan } x$

-3 $f(x) = \cos 2x$ $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

لدينا : $F(x) = \frac{1}{2} \sin (2x) + C$

وبما أن : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

فإن : $C = 0$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

4- خاصية :

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I .
- و G دالة أصلية للدالة g على I .
- فإن : الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .

5- خاصية :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية .

ملاحظة وخاصة :

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I ، فإنه يوجد عدد حقيقي λ
حيث : $F - G = \lambda$

6- جدول الدوال الأصلية الاعتيادية :

| ملاحظات | الدالة F (الأصلية) | الدالة f |
|-------------------------------|------------------------------|--------------------------------------|
| $C \in \mathbb{R}$ | $x+C$ | 1 |
| | $\frac{1}{2}x^2+C$ | x |
| $n \in \mathbb{N}$ | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ | x^n |
| $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ | $\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C$ | x^r |
| $n \in \mathbb{N}$ | $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$ | $u^n \cdot u'$ |
| $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ | $\frac{1}{r+1}u^{r+1}+C$ | $u^r \cdot u'$ |
| | $\text{Arc tan } x + C$ | $\frac{1}{x^2+1}$ |
| | $\sin x + C$ | $\cos x$ |
| | $-\cos x + C$ | $\sin x$ |
| $a \neq 0$ | $\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$ | $\cos(ax+b)$ |
| $a \neq 0$ | $\frac{-1}{a}\cos(ax+b) + C$ | $\sin(ax+b)$ |
| $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ | $\tan x + C$ | $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ |

تطبيقات :

حدد دالة أصلية للدالة f في الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad -1$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-2}{x^2 + 1} + 1$$

$$F(x) = x - 2 \operatorname{Arc} \tan x + C \quad \text{إن:}$$

$$f(x) = x \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad -2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} 2x \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad \text{لدينا:}$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} (2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3} + 1} \quad \text{ومنه:}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3}{8} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}$$

$$F(x) = \frac{3}{8} \sqrt[3]{x^2 + 1}^4 \quad \text{إن:}$$

$$f(x) = (2x + 1) \sqrt{x^2 + x + 3} \quad -3$$

$$= (x^2 + x + 3)^{\frac{1}{2}} (2x + 1)$$

$$F(x) = \frac{2}{3} (x^2 + x + 3)^{\frac{3}{2}}$$

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} \quad -4$$

$$F(x) = \tan^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} x \quad \text{لدينا:} \quad -5$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{3}{5} (x^2 + 1)^{\frac{5}{3}} + C \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{3}{10} (x^2 + 1)^{\frac{5}{3}} + C$$