

1- المجموعة  $\mathbb{C}$   
أ/ مبرهنة

توجد مجموعة  $\mathbb{C}$  تتضمن  $\mathbb{R}$  وتحقق:

$$(i) \text{ يحتوي } \mathbb{C} \text{ على عنصر غير حقيقي } i \text{ و يحقق } i^2 = -1$$

$$(ii) \text{ كل عنصر من } \mathbb{C} \text{ يكتب بكيفية وحيدة على الشكل: } a+ib \text{ بحيث } (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

(iii) المجموعة  $\mathbb{C}$  مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في  $\mathbb{R}$  و لهما نفس الخاصيات

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad *$$

ملاحظة:

ب/ تساوي عددين عقديين

$$b = b' \text{ و } a = a' \Leftrightarrow a+ib = a'+ib' \quad \text{ليكن } (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } (a';b') \in \mathbb{R}^2 \quad \text{خاصية}$$

برهان

$$* \text{ } a = a' \text{ و } b = b' \Leftrightarrow a+ib = a'+ib' \text{ استلزام صحيح}$$

$$* \text{ نعتبر } a+ib = a'+ib' \text{ و منه } i(b-b') = a'-a$$

$$\text{نفترض أن } b \neq b' \text{ و منه } i = \frac{a'-a}{b-b'}$$

$$\text{و حيث أن } (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } (a';b') \in \mathbb{R}^2 \text{ فإن } \frac{a'-a}{b-b'} \in \mathbb{R}$$

و بالتالي  $i \in \mathbb{R}$  و هذا غير صحيح لان عدد غير حقيقي  
إذن افتراضنا خاطئ و منه  $b = b'$  و بالتالي  $a'-a = 0$  إذن  $a' = a$

ج/ اصطلاحات و تعاريف

$$* \text{ ليكن عدد عقدي } z = a+ib \text{ حيث } (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

العدد  $a$  يسمى الجزء الحقيقي نكتب  $Re(z) = a$ .

العدد  $b$  يسمى الجزء التخيلي نكتب  $Im(z) = b$

الكتابة  $z = a+ib$  حيث  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$  تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي  $z$

- نقول إن عددا عقديا عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان جزئه الحقيقي منعدما و جزئه تخيلي غير منعدم
- نقول إن عددا عقديا عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان جزئه التخيلي منعدما

أمثلة

حدد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد العقدي  $z$  في الحالات التالية

$$z = \sqrt{2}-3i \text{ أ/ } z = 5i-3 \text{ ب/ } z = 2\sqrt{3}i \text{ ج/ } z = 17 \text{ د/}$$

د/ العمليات

$$\text{ليكن عددين عقديين } z = a+ib \text{ و } z' = a'+ib' \text{ حيث } (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } (a';b') \in \mathbb{R}^2$$

$$* \text{ الجمع } z+z' = (a+a')+(b+b')i$$

$$* \text{ الضرب } z \cdot z' = (aa'-bb')+(ab'+a'b)i$$

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \quad (a-ib)^2 = (a^2 - b^2) - 2abi \quad (a+ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi *$$

$$* \text{ مقلوب عدد عقدي غير منعدم } \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

$$* \text{ خارج عددين عقديين } \frac{z}{z'} = \frac{a-bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2} \text{ حيث } z' \neq 0$$

\* خاصيات العدد العقدي  $i$

$$n \in \mathbb{Z} \text{ ليكن}$$

$$i^n = i \text{ إذا كان } n = 4k+1 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$i^n = 1 \text{ إذا كان } n = 4k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$i^n = -i \text{ إذا كان } n = 4k+3 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$i^n = -1 \text{ إذا كان } n = 4k+2 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$1- \text{ نحدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية } \frac{2i}{3-i} + \frac{(1-2i)^2}{i} ; \frac{3-2i}{2+i} ; \frac{1}{2-3i}$$

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

$$\frac{3-2i}{2+i} = \frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-2-3i-4i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

$$\frac{2i}{3-i} + \frac{(1-2i)^2}{i} = \frac{2i(3+i)}{10} - i(1-4-4i) = \frac{3}{5}i - \frac{1}{5} + 3i - 4 = -\frac{21}{5} + \frac{18}{5}i$$

2- نحسب  $(1+i)^2$  ونستنتج  $(1+i)^{230}$

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(1+i)^{230} = (2i)^{115} = 2^{115}i^{4 \times 28 + 3} = -2^{115}i$$

3- نحل المعادلة  $2iz - 3i + 2 = z + i$   $z \in \mathbb{C}$

$$2iz - 3i + 2 = z + i \Leftrightarrow (1+2i)z = -2 + 4i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2+4i}{1+2i} = \frac{-2(1-2i)(1-2i)}{5} = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$$

$$S = \left\{ \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i \right\} \text{ إذن}$$

## 2- التمثيل الهندسي لعدد عقدي- لحق متجهة

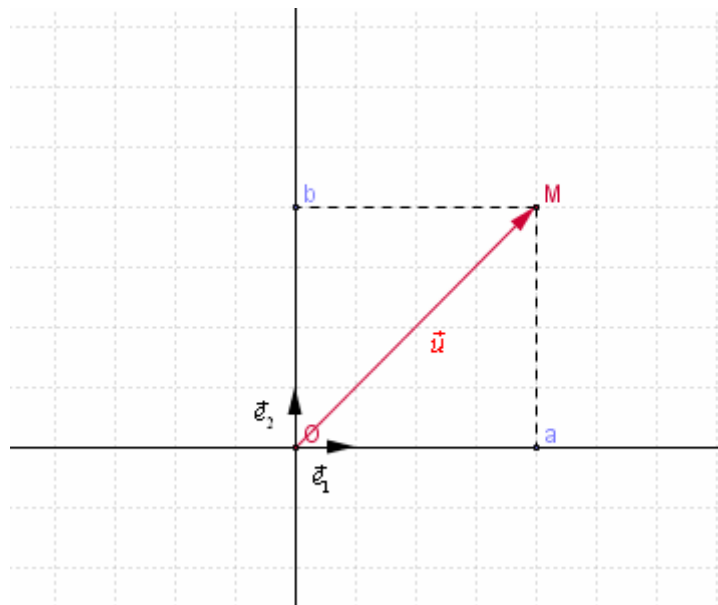
المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ .

كل نقطة  $M(a; b)$  من المستوى  $(P)$  هي صورة عدد عقدي وحيد  $z = a + ib$ . نكتب  $M(z)$

و  $z = a + ib$  يسمى لحق  $M(a; b)$ . نكتب  $z = aff(M)$

كل متجهة  $\vec{u}(a; b)$  من المستوى هي صورة عدد عقدي وحيد  $z = a + ib$ . نكتب  $\vec{u}(z)$

العدد العقدي  $z = a + ib$  حيث  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  يسمى لحق المتجهة  $\vec{u}(a; b)$  نكتب  $z = aff(\vec{u})$



### ملاحظة و مصطلحات

\* الأعداد الحقيقية هي ألحاق نقط محور الافاصيل الذي يسمى المحور الحقيقي  
\* الأعداد التخيلية الصرفة هي ألحاق نقط محور الأراتيب الذي يسمى المحور التخيلي

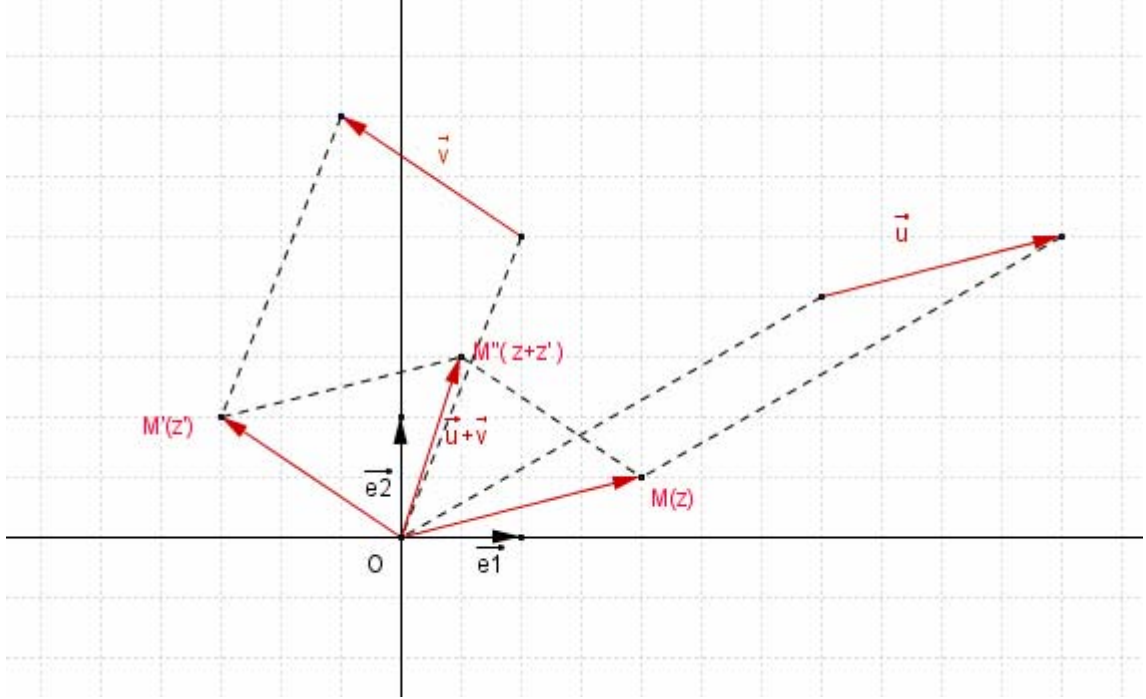
**\*- لِحَق  $\overline{AB}$**

ليكن  $A$  و  $B$  لِحَقِيهَما  $z_A = a + ib$  و  $z_B = a' + ib'$  عَلى التَّوَالِي  
ومنه  $A(a; b)$  و  $B(a'; b')$  و بالتَّالِي  $\overline{AB}(a' - a; b' - b)$  أَي  
 $aff(\overline{AB}) = (a' - a) + i(b' - b) = (a' + ib') - (a + ib) = z_B - z_A$

لِحَق  $\overline{AB}$  هُو  $z_B - z_A$  حَيْث  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$

**\*- لِحَق  $\vec{u} + \vec{v}$  و  $\alpha\vec{u}$**

نَعْلَمُ أَن إِذَا كَانَ  $\vec{u}(a; b)$  و  $\vec{v}(a'; b')$  فَان  $\vec{u} + \vec{v}(a + a'; b + b')$  وَمَنَّهُ  $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$



$$aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$$

لِتَكُن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مَتَجَهَّتَيْنِ مِنَ الْمَسْتَوَى و لِكُلِّ عَدَدٍ حَقِيقِي  $\alpha$

$$aff(\alpha\vec{u}) = \alpha aff(\vec{u})$$

**تَمَرِين**

فِي الْمَسْتَوَى الْعَقْدِي أَنْشَأَ النِّقْطَ  $A$  و  $B$  و  $C$  أَلْحَاقَهَا عَلى التَّوَالِي  $z_A = 2$   
و  $z_B = -1 + 4i$  و  $z_C = -3i$  و الْمَتَجَهَّةَ  $\vec{u}$  الَّتِي لِحَقَهَا  $-1 + 3i$

**\*- اسْتِقَامِيَّةُ النِّقْطِ**

النِّقْطُ الْمَخْتَلِفَةُ  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$  و  $C(z_C)$  مَسْتَقِيمِيَّةٌ  $\Leftrightarrow \overline{AB} = \lambda \overline{AC}$  /  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / aff(\overline{AB}) = aff(\lambda \overline{AC})$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / z_B - z_A = \lambda(z_C - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \lambda$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$$

تَكُونُ النِّقْطُ الْمَخْتَلِفَةُ  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$  و  $C(z_C)$  مَسْتَقِيمِيَّةٌ إِذَا وَفَقَطُ إِذَا كَانَ  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

**\*- الْمَرَجِح**

لِتَكُن  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$  و  $G(z_G)$  نِقْطًا مِنَ الْمَسْتَوَى الْعَقْدِي و  $\alpha$  و  $\beta$  عَدَدَيْنِ حَقِيقِيَيْنِ حَيْث  $\alpha + \beta \neq 0$

$G$  مَرَجِح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  إِذَا وَفَقَطُ إِذَا كَانَ  $(\alpha + \beta)z_G = \alpha z_A + \beta z_B$

لتكن  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$  و  $I(z_I)$  نقط من المستوى العقدي

$$I \text{ منتصف } [A;B] \text{ إذا وفقط إذا كان } z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

تمرين

بين أن النقط  $A(1+i)$  و  $B(1+3i)$  و  $C\left(\frac{-1}{2}-2i\right)$  مستقيمة

الجواب

$$\frac{\left(\frac{-1}{2}-2i\right)-(1+i)}{(2+3i)-(1+i)} = \frac{-3-6i}{1+2i} = \frac{(-3-6i)(1-2i)}{2(1+2i)(1-2i)} = \frac{-3+6i-6i-12}{10} = -\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$$

إذن  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمة

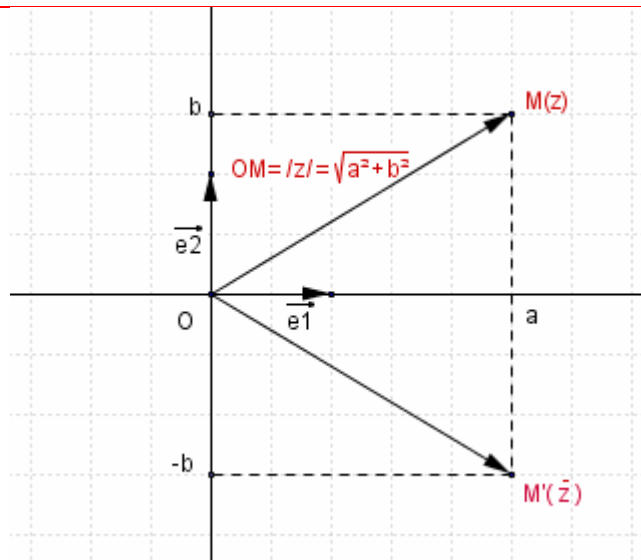
3- المرافق و المعيار

أ/ تعريف

ليكن عدد عقدي  $z = a + ib$  حيث  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ .

\* العدد العقدي  $z = a - ib$  يسمى مرافق العدد العقدي  $z = a + ib$  ونرمز له بـ  $\bar{z} = a - ib$ .

\* العدد الحقيقي  $\sqrt{z\bar{z}}$  يسمى معيار العدد العقدي  $z = a + ib$ . نرمز له بـ  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ .



ملاحظة

\* النقطتان  $M(z)$  و  $M'(\bar{z})$  متماثلتان بالنسبة لمحور الافاصل

\* إذا كان  $z = a + ib$  فإن  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

ب/ خاصيات

ليكن عددين عقديين  $z = a + ib$  و  $z' = a' + ib'$  حيث  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  و  $(a'; b') \in \mathbb{R}^2$

$$\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + (b + b')i} = a + a' - (b + b')i = a - ib + a' - ib' = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{(aa' - bb') + (ab' + a'b)i} = aa' - bb' - ab'i - a'bi = a(a' - b'i) - bi(a' - b'i) = (a - bi)(a' - b'i) = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a + bi}\right)} = \overline{\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a - ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \text{ ومنه}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

### خاصيات

لتكن  $(z; z') \in \mathbb{C}^2$  و  $\alpha \in \mathbb{R}$  و  $n \in \mathbb{Z}^*$

$$\overline{\overline{z}} = z \quad *$$

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \quad ; \quad z - \overline{z} = 2 \operatorname{Im}(z)i \quad *$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z \quad *$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z \quad *$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}, \quad z' \neq 0 \quad \overline{\alpha z} = \alpha \overline{z} \quad \overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'} \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad *$$

### خاصيات

لتكن  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$  نقطتين من المستوى العقدي منسوب إلى المعلم  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ .

$$OA = |z_A|$$

$$\|\overline{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$$

لتكن  $(z; z') \in \mathbb{C}^2$  و  $\alpha \in \mathbb{R}$  و  $n \in \mathbb{Z}^*$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad *$$

$$|z| = |-z| = |\overline{z}| \quad *$$

$$z' \neq 0 \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad |z^n| = |z|^n \quad |z \cdot z'| = |z| |z'| \quad *$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad *$$

### تمرين

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط  $M(z)$  في كل حالة من الحالتين التاليتين

$$|z-2| = |z+2i| \quad -2$$

$$|z-1+i| = |2-i\sqrt{5}| \quad -1$$

### -4 الشكل المثلثي لعدد عقدي و العمدة

#### أ / العمدة لعدد عقدي

المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

ليكن  $z = a + ib$  حيث  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  عددا عقديا غير منعدم و

النقطة  $M$  صورته، وليكن  $\alpha$  قياسا للزاوية  $(\vec{e}_1, \overline{OM})$ .

العدد  $\alpha$  يسمى عمدة للعدد العقدي  $z$

نكتب  $[2\pi] \arg z \equiv \alpha$ .

#### ملاحظة

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \arg a \equiv 0 \quad [2\pi] \quad *$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \arg a \equiv 0 \quad [2\pi] \quad *$$

$$\forall b \in i\mathbb{R}^+ \quad \arg b \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad *$$

$$\forall b \in i\mathbb{R}^+ \quad \arg b \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad *$$

#### ب / الكتابة المثلثية لعدد عقدي

-\* ليكن  $z = a + ib \in \mathbb{R}^2$  عددا عقديا غير منعدم و  $r$  عددا حقيقيا موجبا قطعاً و  $\alpha$

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{نضع عددا حقيقيا}$$

$$\text{ومنه } z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \text{حيث } \cos \alpha = \frac{a}{r} \quad ; \quad \sin \alpha = \frac{b}{r}$$

$$\arg z \equiv \alpha \quad [2\pi] \quad \text{إذن}$$

الكتابة  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي  $z$  و نكتب  $z = [r, \alpha]$

$$1+i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left[ \sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$15 = [15; 0] \quad -2i = \left[ 2; -\frac{\pi}{2} \right]$$

$$-\sqrt{3}-i = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \left[ 2; \frac{5\pi}{6} \right]$$

## ج / خاصيات

ليكن  $z = [r, \alpha]$  و  $z' = [r', \alpha']$  عددين عقديين غير منعدمين

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha' + i \sin \alpha') = (\cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha') + i(\sin \alpha \cos \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha')$$

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha' + i \sin \alpha') = \cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')$$

$$z \times z' = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha') = rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')) = [rr'; \alpha + \alpha']$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha} \right) = \frac{1}{r} \left( \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{r} (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) = \left[ \frac{1}{r}; -\alpha \right]$$

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = [r; \alpha] \times \left[ \frac{1}{r'}; -\alpha' \right] = \left[ \frac{r}{r'}; \alpha - \alpha' \right]$$

$$\bar{z} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r(\cos \alpha - i \sin \alpha) = r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) = [r, -\alpha]$$

$$-z = r(-\cos \alpha - i \sin \alpha) = r(\cos(\alpha + \pi) + i \sin(\alpha + \pi)) = [r, \alpha + \pi]$$

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z} \quad z^n = [r^n; n\alpha] \quad \text{نبين أن}$$

ليكن  $z = [r; \alpha]$  عدد عقدي غير منعدم

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N} \quad z^n = [r^n; n\alpha] \quad \text{لنبين أولا}$$

من أجل  $n = 0$  لدينا  $z^0 = 1$  و  $1 = [1; 0] = [1; 0 \times \alpha]$  اذن العبارة صحيحة من أجل  $n = 0$

لنفترض أن  $z^n = [r^n; n\alpha]$  و نبين أن  $z^{n+1} = [r^{n+1}; (n+1)\alpha]$

$$z^{n+1} = z \times z^n = [r; \alpha] \times [r^n; n\alpha] = [r \times r^n; \alpha + n\alpha] = [r^{n+1}; (n+1)\alpha]$$

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N} \quad z^n = [r^n; n\alpha] \quad \text{إذن}$$

ليكن  $n \in \mathbb{Z}^-$  و منه  $-n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{[r^{-n}; -n\alpha]} = \left[ \frac{1}{r^{-n}}; -(-n\alpha) \right] = [r^n; n\alpha]$$

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z} \quad z^n = [r^n; n\alpha] \quad \text{إذن}$$

## خاصيات

ليكن  $z = [r, \alpha]$  و  $z' = [r', \alpha']$  عددين عقديين غير منعدمين

$$z = z' \Leftrightarrow r = r' \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha' \quad *$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \quad [2\pi] \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \quad [2\pi] \quad \text{و} \quad \arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \quad [2\pi] \quad *$$

$$\frac{z}{z'} = \left[ \frac{r}{r'}, \alpha - \alpha' \right] \quad \text{و} \quad \frac{1}{z} = \left[ \frac{1}{r}, -\alpha \right] \quad \text{و} \quad zz' = [rr', \alpha + \alpha']$$

$$-z = [r, \alpha + \pi] \quad \text{و} \quad \bar{z} = [r, -\alpha] \quad \arg(-z) \equiv \pi + \arg z \quad [2\pi] \quad \text{و} \quad \arg(\bar{z}) \equiv -\arg z \quad [2\pi] \quad *$$

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z} \quad \arg(z^n) \equiv n \arg z \quad [2\pi] \quad *$$

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z} \quad z^n = [r^n; n\alpha]$$

### تمرين

تعتبر العددين العقديين  $u=2-2i$  و  $v=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$

1- احسب معيار وعمدة كل من  $u$  و  $v$

2- حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلثية لـ  $\frac{u}{v}$  ثم استنتج  $\cos\frac{7\pi}{12}$  ;  $\sin\frac{7\pi}{12}$

### خاصية

ليكن  $A(z_A) \neq B(z_B)$  و  $D(z_D) \neq C(z_C)$

\*- توجد نقطة وحيدة  $M$  حيث  $\overline{OM} = \overline{AB}$  ومنه  $M(z_B - z_A)$

و بالتالي  $[2\pi]$   $\arg(z_B - z_A) = (\bar{e}_1; \overline{OM})$  إذن  $[2\pi]$   $\arg(z_B - z_A) = (\bar{e}_1; \overline{AB})$

$$(\overline{AB}; \overline{CD}) \equiv (\bar{e}_1; \overline{CD}) - (\bar{e}_1; \overline{AB}) \equiv \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi] \quad *$$

### خاصية

إذا كان  $A(z_A) \neq B(z_B)$  و  $D(z_D) \neq C(z_C)$  فإن  $[2\pi]$   $\arg(z_B - z_A) = (\bar{e}_1; \overline{AB})$

$$\text{و } [2\pi] \quad (\overline{AB}; \overline{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

### نتيجة

إذا كان  $A(z_A) \neq B(z_B)$  و  $A \neq C(z_C)$  فإن  $[2\pi]$   $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overline{AB}; \overline{AC})$

### د/ تطبيقات

\* الاستقامية: لتكن  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$  و  $C(z_C)$  نقط مختلفة

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi \quad [2\pi] \quad \text{أو} \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ و } C \text{ مستقيمة}$$

\* التعامد: لتكن  $A(z_A) \neq B(z_B)$  و  $D(z_D) \neq C(z_C)$

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

### تمرين

في المستوى العقدي المنسوب لمعلم م.م.م  $(o; \bar{e}_1; \bar{e}_2)$

(1). نعتبر النقط  $A(6+2i)$  و  $B(-1+3i)$  و  $C\left(\frac{7}{2}-3i\right)$  حدد قياس للزاوية الموجهة  $(\widehat{BA}; \widehat{BC})$

(2). نعتبر النقط  $E(2+3i)$  و  $F(1+2i)$  و  $G(-1)$  حدد قياس للزاوية الموجهة  $(\widehat{FE}; \widehat{FG})$

$$\text{تمرين: نضع } u_1 = 1-i \text{ ; } u_2 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$$

1- حدد عمدة ومعيار  $u_1$  و  $u_2$

2- حدد عمدة ومعيار  $\frac{u_1}{u_2}$  واستنتج  $\cos\frac{\pi}{12}$  و  $\sin\frac{\pi}{12}$

$$3- \text{بين أن } \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24} = 1$$

### الحل

1- نحدد عمدة ومعيار  $u_1$  و  $u_2$

$$u_1 = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \left[ \sqrt{2}; \frac{-\pi}{6} \right]$$

3- نحدد عمدة ومعيار  $\frac{u_1}{u_2}$  ونستنتج  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\left[ \sqrt{2}; \frac{-\pi}{4} \right]}{\left[ \sqrt{2}; \frac{-\pi}{6} \right]} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right] = \left[ 1; \frac{-\pi}{12} \right]$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{1-i}{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}} = \frac{(2-2i)(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(\sqrt{6}+i\sqrt{2})} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \left( \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) i$$

$$\left[ 1; \frac{-\pi}{12} \right] = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - \left( \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right) i \quad \text{ومنه}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} \cos \frac{-\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{-\pi}{12} = -\left( \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) \end{cases}$$

$$\left( \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} i \right)^{24} = 1 \quad \text{3- نبين أن}$$

$$\left( \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} i \right)^{24} = \left[ 1; \frac{\pi}{12} \right]^{24} = \left[ 1; \frac{24\pi}{12} \right] = [1; 2\pi] = 1$$

**تمرين**

ليكن  $\theta \in \mathbb{R}$  ، حدد معيار وعمدة الأعداد العقدية :

$$a = -\cos \theta + i \sin \theta \quad ; \quad b = \cos \theta - i \sin \theta \quad ; \quad c = -\cos \theta - i \sin \theta$$

$$a' = \sin \theta + i \cos \theta \quad ; \quad b' = \sin \theta - i \cos \theta \quad ; \quad c' = -\sin \theta - i \cos \theta \quad ; \quad d = -\sin \theta + i \cos \theta$$

**الجواب**

ليكن  $\theta \in \mathbb{R}$  ،

$$a = -\cos \theta + i \sin \theta = \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta) = [1; \pi - \theta]$$

$$b = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = [1; -\theta]$$

$$c = -\cos \theta - i \sin \theta = \cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta) = [1; \pi + \theta]$$

$$d = -\sin \theta + i \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \left[ 1; \frac{\pi}{2} + \theta \right]$$

$$a' = \sin \theta + i \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left[ 1; \frac{\pi}{2} - \theta \right]$$

$$b' = \sin \theta - i \cos \theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \left[ 1; -\frac{\pi}{2} + \theta \right]$$

$$c' = -\sin \theta - i \cos \theta = \sin(\pi + \theta) + i \cos(\pi + \theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\pi + \theta)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\pi + \theta)\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left[ 1; -\frac{\pi}{2} - \theta \right]$$

**تمرين**



$$z_1 = 2 - 2i \text{ و } z_2 = 2i \quad a = -4 \text{ نعتبر}$$

1 - حدد الشكل المثلثي لـ  $a$  و  $z_1$  و  $z_2$

$$2- \text{تحقق أن } a + z_1^2 + z_2^4 = -72$$

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر  $A(a)$  و  $B(z_1)$  و  $C(z_2)$

3- (1.3) بين أن  $BAC$  قائم الزاوية و متساوي الساقين في  $B$

$$(2.3) \text{ حدد المجموعة } (F) \text{ حيث } (F) = \{M(z) / |z+1+i| = \sqrt{10}\}$$

(3.3) تحقق أن  $A$  و  $B$  و  $C$  تنتمي إلى  $(F)$  ثم أنشئ  $BAC$  و  $(F)$

**الحل**

2 - نحدد الشكل المثلثي لـ  $a$  و  $z_1$  و  $z_2$

$$z_2 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] \text{ و } z_1 = 2i = \left[2; \frac{\pi}{2}\right] \text{ و } a = -4 = [4; \pi]$$

$$4.2 - \text{نتحقق أن } a + z_1^2 + z_2^4 = -72$$

$$a + z_1^2 + z_2^4 = [4; \pi] + \left[2; \frac{\pi}{2}\right]^2 + \left[2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]^4 = [4; \pi] + [2; \pi]^2 + \left[(2\sqrt{2})^4; -\pi\right] = -4 - 4 - (2\sqrt{2})^4 = -4 - 4 - 64 = -72$$

3- (1.3) نبين أن  $BAC$  قائم الزاوية و متساوي الساقين في  $B$

لدينا  $A(-4)$  و  $B(2i)$  و  $C(2-2i)$

$$\widehat{(BA; BC)} \equiv \arg\left(\frac{2-2i-2i}{-4-2i}\right) \equiv \arg\left(\frac{2-4i}{-4-2i}\right)$$

$$\equiv \arg\left(\frac{i(-2i-4)}{-4-2i}\right) \equiv \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$$BA = |-4-2i| = \sqrt{20} \quad BC = |2-4i| = \sqrt{20}$$

إذن المثلث  $BAC$  قائم الزاوية و متساوي الساقين في  $B$

(2.3) نحدد المجموعة  $(F)$

$$M(z) \in (F) \Leftrightarrow |z+1+i| = \sqrt{10}$$

$$M(z) \in (F) \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{10} \quad / \Omega(1+i)$$

$$M(z) \in (F) \Leftrightarrow M \in C(\Omega; \sqrt{10}) \quad / \Omega(-1; -1)$$

$$(F) = C(\Omega; \sqrt{10}) \quad / \Omega(-1; -1)$$

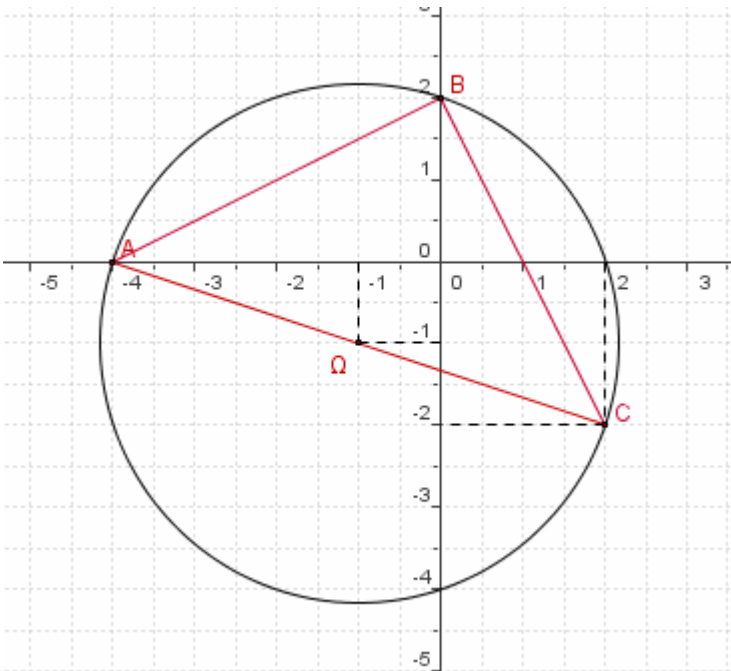
(3.4) نتحقق أن  $A(-4)$  و  $B(2i)$  و  $C(2-2i)$  تنتمي إلى  $(F)$  و ننشئ  $BAC$  و  $(F)$

$$\Omega A = |-4+1+i| = |-3+i| = \sqrt{10}$$

$$\Omega B = |2i+1+i| = |1+3i| = \sqrt{10}$$

$$\Omega C = |2-2i+1+i| = |3-i| = \sqrt{10}$$

إذن  $A$  و  $B$  و  $C$  تنتمي إلى  $(F)$



## تمرين

في المستوى العقدي نعتبر النقط :  $A(1+i)$  و  $B$  بحيث :  $OA = OB$  و  $[2\pi]$   $\overline{(OA, OB)} \equiv \frac{\pi}{3}$

(1) اعط الشكل الجبري ل  $z_B$ .

(2) احسب المسافة  $AB$ .

(3) حدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة :  $(\vec{e}_1, \overline{AB})$

## الجواب

(1) نعطي الشكل الجبري ل  $z_B$ .

$$|z_B| = OB = OA = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{ومنه} \quad 1+i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left[ \sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\arg(z_B) \equiv \overline{(\vec{e}_1; \overline{OB})} \equiv \overline{(\vec{e}_1; \overline{OA})} + \overline{(\overline{OA}; \overline{OB})} \equiv \arg(1+i) + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \quad [2\pi]$$

$$z_B = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \quad \text{ومنه}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$z_B = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذن}$$

(2) نحسب المسافة  $AB$

$$AB = \sqrt{\left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} - 1 \right)^2 + \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1 \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left( \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{2}$$

(3) نحدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة :  $(\vec{e}_1, \overline{AB})$

$$(\vec{e}_1; \overline{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) \equiv \arg \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1 - i \right) \equiv \arg \left( -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right) \quad [2\pi]$$

$$(\vec{e}_1; \overline{AB}) \equiv \arg \left( \sqrt{2} \left[ \left( -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right) + i \left( \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right) \right] \right) \equiv \arg \left( \sqrt{2} \left[ -\sin \frac{7\pi}{12} - i \cos \frac{7\pi}{12} \right] \right) \quad [2\pi]$$

$$(\vec{e}_1; \overline{AB}) \equiv \arg \left( \left[ \sqrt{2}; -\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12} \right] \right) \equiv \arg \left( \left[ \sqrt{2}; -\frac{13\pi}{12} \right] \right) \equiv -\frac{13\pi}{12} \equiv \frac{11\pi}{12} \quad [2\pi]$$

إذن القياس الرئيسي ل  $(\vec{e}_1, \overline{AB})$  هو  $\frac{11\pi}{12}$

## تمرين

نعتبر المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$f(z) = \frac{\bar{z}+i}{z} \quad \text{وليكن } f \text{ المعرفة على } \mathbb{C}^* \text{ بـ}$$

1- حدد مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث  $|f(z)|=1$

$$2- \text{ نضع } z = \cos \theta + i \sin \theta \text{ حيث } \theta \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$$

أ- مثل النقط  $A(i)$  و  $B(z)$  و  $C(\bar{z})$  و  $D(\bar{z}+i)$

- ب- تحقق أن  $OCDA$  معين واستنتج عمدة  $\bar{z} + i$  بدلالة  $\theta$  ثم عمدة  $f(z)$  بدلالة  $\theta$   
 ج- حدد معيار  $f(z)$  بدلالة  $\theta$

**الحل**

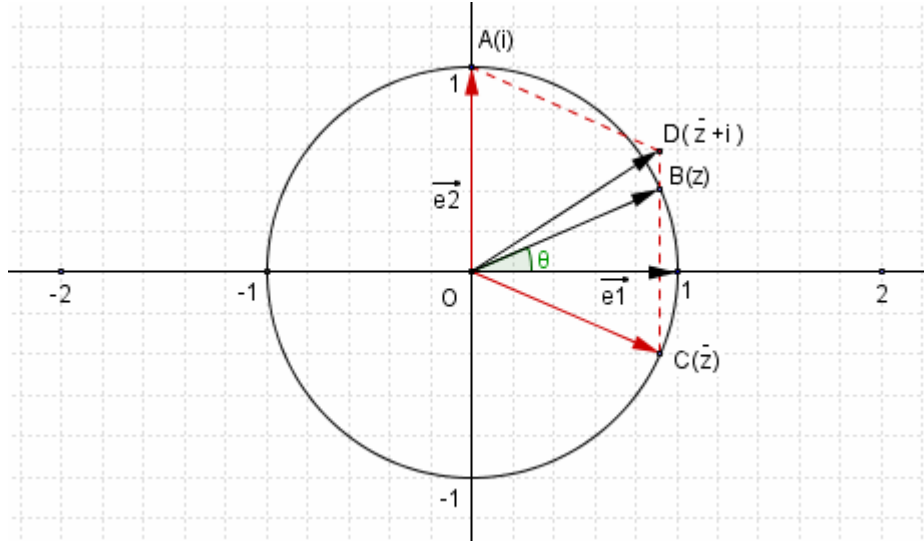
- 1- نحدد مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث  $|f(z)|=1$ .  
 ليكن  $z \in \mathbb{C}^*$  نضع  $z = x + iy$  حيث  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  و  $(x, y) \neq (0, 0)$   
 $\bar{z} + i = x - iy + i = x + i(1 - y)$

$$|f(z)|=1 \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{z} + i}{z} \right| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} + i| = |z| \Leftrightarrow x^2 + (1 - y)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2y - 1 = 0$$

إذن مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث  $|f(z)|=1$  هي المستقيم الذي معادلته  $y = \frac{1}{2}$

- 2- نضع  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  حيث  $\theta \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$

أ- نمثل النقط  $A(i)$  و  $B(z)$  و  $C(\bar{z})$  و  $D(\bar{z} + i)$   
 $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OC}$  ممتثلان بالنسبة لمحور الافاصيل



- ب- نتحقق أن  $OCDA$  معين و نستنتج عمدة  $\bar{z} + i$  بدلالة  $\theta$  ثم عمدة  $f(z)$  بدلالة  $\theta$   
 ومنه  $OCDA$  معين  $OC = |\bar{z}| = 1$  ;  $OA = |i| = 1$  ;  $CD = |i| = 1$  ;  $AD = |\bar{z}| = 1$

$$\left( \overline{OA}; \overline{OD} \right) \equiv \frac{1}{2} \left( \overline{OA}; \overline{OC} \right) \quad [2\pi] \quad \text{ومنه} \quad \left[ \widehat{COA} \right] \text{ منصف } (OD)$$

$$\left( \overline{OA}; \overline{OD} \right) \equiv \frac{1}{2} (\arg(\bar{z}) - \arg(i)) \equiv \frac{1}{2} \left( -\theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z} + i) \equiv (\bar{e}_1; \overline{OD}) \equiv (\bar{e}_1; \overline{OA}) + \left( \overline{OA}; \overline{OD} \right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z} + i) \equiv \arg(i) + \frac{1}{2} \left( -\theta - \frac{\pi}{2} \right) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left( -\theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z} + i) \equiv -\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\arg(f(z)) \equiv \arg(\bar{z} + i) - \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{ومنه} \quad \arg(f(z)) = \arg\left( \frac{\bar{z} + i}{z} \right) \quad \text{لدينا}$$

$$\arg(f(z)) \equiv \frac{-\theta}{2} + \frac{\pi}{4} - \theta \equiv \frac{-3\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

- ج- نحدد معيار  $f(z)$  بدلالة  $\theta$

لدينا  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  ومنه  $|z| = 1$

$$|f(z)| = \left| \frac{\bar{z} + i}{z} \right| = |\bar{z} + i| = \sqrt{(\cos^2 \theta + (1 - \sin \theta)^2)} = \sqrt{2 - 2 \sin \theta} \text{ و بالتالي}$$

#### 4 - الإزاحة و التحاكي و الاعداد العقدية أ/ الإزاحة

نعتبر  $t$  إزاحة متجهتها  $\bar{u}$  حيث  $aff(\bar{u}) = a$  لتكن  $M(z)$  و  $M'(z')$

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \bar{u} \Leftrightarrow aff(\overline{MM'}) = aff(\bar{u}) \Leftrightarrow z' - z = a \Leftrightarrow z' = z + a$$

#### خاصية

التحويل الذي يحول كل نقطة  $M(z)$  من المستوى  $(P)$  الى النقطة  $M'(z+a)$  من المستوى  $(P)$  هو

الإزاحة التي متجهتها  $\bar{u}$  حيث  $aff(\bar{u}) = a$

#### تمرين

1- نعتبر الإزاحة  $t_{\bar{u}}$  حيث  $\bar{u}(1;2)$

لتكن  $M(z)$  و  $M'(z')$  نقطتين من المستوى العقدي بحيث  $t_{\bar{u}}(M) = M'$

أ/ حدد  $z'$  بدلالة  $z$

ب/ في المستوى العقدي نربط كل  $M(z)$  بنقطة  $M'(z')$  حيث  $z' = z + 1 - i$

بين ان  $M'$  صورة  $M$  بإزاحة و حدد متجهتها

#### ب/ التحاكي

#### نشاط

لتكن  $M(z)$  و  $M'(z')$  و  $\Omega(\omega)$  نقط من من المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

مباشر  $(O; \bar{e}_1; \bar{e}_2)$  و  $k$  عددا حقيقيا غير منعدم

نربط النقطة  $M(z)$  من المستوى بالنقطة  $M'(z')$  بالتحويل  $h$  حيث  $z' - \omega = k(z - \omega)$

1/ حدد النقط الصامدة بـ  $h$

2/ حدد علاقة متجهية بين النقطتين  $M$  و  $M'$  ثم حدد طبيعة  $h$

#### خاصية

لتكن  $M(z)$  و  $M'(z')$  و  $\Omega(\omega)$  نقط من من المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(O; \bar{e}_1; \bar{e}_2)$  و  $k$  عددا حقيقيا غير منعدم

التحويل الذي يحول كل نقطة  $M(z)$  من المستوى  $(P)$  الى النقطة  $M'(z')$  من المستوى  $(P)$

حيث  $z' - \omega = k(z - \omega)$  هو التحاكي الذي مركزه  $\Omega(\omega)$  و نسبته  $k$

#### تمرين

في المستوى العقدي نربط كل  $M(z)$  بنقطة  $M'(z')$  حيث  $z' = \frac{1}{2}z + -2i$

1/ حدد  $\omega$  لحق النقطة  $\Omega$  حيث  $\omega = \frac{1}{2}\omega + -2i$

2/ بين ان  $M'$  صورة  $M$  بتحاك  $h$  محدد عناصره المميزة