الفضاءات المتجهية الحقيقية

I – تعريف و أمثلة :

1 – قانون تركيب خرجي :

a – تعريف :

لتكن A و E مجموعتين غير فارغتين
كل تطبيق f من $A\times E$ نحو E يسمى قانون تركيب خارجي معرف على E ذو المعاملات في A
بتعبير أخر :

f قانون تركيب خارجي معرف على E ذو المعاملات في A $\Leftrightarrow$	$f:A\times E\to E$ $(\alpha,x)\to f(\alpha,x)$

يرمز عادة للصورة $f(\alpha,x)$ بالرمز $\alpha\bullet x$ أو αx

b – أمثلة :

1 – لكل α من IR و M من $M_2(IR)$ حيث $M=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ لدينا : $\alpha M=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(IR)$

إذن :التطبيق : $f:IR\times M_2(IR)\to M_2(IR)$ قانون تركيب خارجي معرف على $M_2(IR)$ و معاملاته في IR
$(\alpha,M)\to\alpha M$

2 – لكل α من IR و f من $F(I,IR)$ (مجموعة الدوال العددية المعرفة على مجال I ضمن IR نحو IR)
لدينا : $\alpha f\in F(I,IR)$

إذن : التطبيق $g:IR\times F(I,IR)\to F(I,IR)$ قانون تركيب خارجي معرف على $F(I,IR)$ و معاملاته في IR
$(\alpha,f)\to\alpha f$

2 – تعريف الفضاء المتجهي :

a – تعريف :

> لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي * و بقانون تركيب خارجي معاملاته في IR : $f:IR\times E\to E$
> $(\alpha,x)\to\alpha\bullet x$
>
> نقول أن : $(E,*,\bullet)$ فضاء متجهي على IR أو فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :
>
> 1 – $(E,*)$ زمرة تبادلية
>
> 2 – $(\alpha+\beta)\bullet x=\alpha\bullet x+\beta\bullet x$ $\quad(\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall x\in E)$
>
> 3 – $(\alpha\beta)\bullet x=\alpha\bullet(\beta\bullet x)$ $\quad(\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall x\in E)$
>
> 4 – $\alpha\bullet(x*y)=\alpha\bullet x*\alpha\bullet y$ $\quad(\forall\alpha\in IR)(\forall(x,y)\in E^2)$

$5-\quad 1\bullet x=x \qquad (\forall x\in E)$

في ما تبقى من هذا الدرس نرمز للقانون الداخلي * بالرمز + و لكل عنصر x من E بالرمز $\vec{x}$ و نسميه متجهة منه التعريف التالي للفضاء المتجهي $(E,+,\times)$

نقول أن : $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي على IR أو فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :
$1-$ $(E,+)$ زمرة تبادلية
$2-\quad (\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y} \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall\vec{x}\in E)$
$3-\quad (\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x}) \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall\vec{x}\in E)$
$4-\quad \alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y} \qquad (\forall\alpha\in IR)(\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2)$
$5-\quad 1\bullet\vec{x}=\vec{x} \qquad (\forall x\in E)$

b – قواعد الحساب في فضاء متجهي :

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي لدينا الخاصيات التالية

1	$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{b}+(-\vec{a})$ المتجهة $\vec{b}+(-\vec{a})$ تسمى فرق المتجهتين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وتكتب كذلك $\vec{b}-\vec{a}$
2	$\alpha\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha=0$ أو $\vec{x}=\vec{0}$ $\qquad (\alpha\in IR)(\forall x\in E)$
3	$(-\alpha)\vec{x}=\alpha(-\vec{x})=-(\alpha\vec{x}) \qquad (\alpha\in IR)(\forall x\in E)$
4	$\alpha(\vec{y}-\vec{x})=\alpha\vec{y}-\alpha\vec{x} \qquad (\alpha\in IR)(\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2)$
5	$(\alpha-\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}-\beta\vec{y} \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall\vec{x}\in E)$

c – أمثلة و تمارين تطبيقية : (أنظر سلسلة التمارين)

II – الفضاء المتجهي الجزئي :

1 – تعريف :

ليكن $(E,+,\times)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير فارغ من E
نقول أن F فضاء متجهي جزئي من الفضاء E إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :
$1-$ F مستقر بالنسبة للقانون الداخلي + أي : $\vec{x}+\vec{y}\in F \qquad (\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2)$
$2-$ F مستقر بالنسبة للقانون الخارجي × أي : $\lambda\vec{x}\in F \qquad (\forall\vec{x}\in F)(\forall\lambda\in IR)$

بتعبير أخر :

F فضاء متجهيا جزئيا من E $\quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} F\neq\varnothing \\ F\subset E \\ (\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2) \quad \vec{x}+\vec{y}\in F \\ (\forall\lambda\in IR)(\forall x\in F) \quad \lambda\vec{x}\in F \end{cases}$

2 – أمثلة :

1	$\{\vec{0}\}$ و E فضائين متجهيين جزئيين من الفضاء المتجهي $(E,+,\times)$
2	P_n مجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من تساوي n فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

	$(F(IR,IR),+,\times)$
3	$\{(x,y)\in IR^2 \ /y=2x\}$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathrm{IR}^2,+,\times)$ (تحقق من ذلك)

3 – الخاصية المميزة لفضاء متجهي جزئي :

ليكن $(E,+,\times)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء من E

F فضاء متجهيا جزئيا من E $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} F\neq\varnothing \\ (\forall(\lambda,\beta)\in IR^2)(\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2) \quad \beta\vec{x}+\lambda\vec{y}\in F \end{cases}$

III – التأليفات الخطية :

1 – تعريف :

لتكن $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و $\cdots$ و $\vec{x}_n$ متجهات من الفضاء المتجهي E و α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n أعدادا حقيقية .

المتجهة $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$ تسمى تأليفة خطية للمتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و $\cdots$ و $\vec{x}_n$ ذات المعاملات α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n

ونقول كذلك أن الأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ تولد المتجهة $\vec{x}$ أو المتجهة $\vec{x}$ مولدة بالأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$

و نقول عن أسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ أنها تولد الفضاء المتجهي E إ وفقط إذا كانت كل متجهة $\vec{x}$ من E تكتب على شكل تأليفة خطية للمتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و $\cdots$ و $\vec{x}_n$

بتعبير اخر:

$\vec{x}$ مولدة بالأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ $\Leftrightarrow$ $(\exists(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in IR^n) / \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

الفضاء E مولد بالأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ $\Leftrightarrow$ $(\forall\vec{x}\in E)(\exists(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in IR^n) / \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

2 – تمرين تطبيقي:

نعتبر المجموعة E المعرفة بالصيغة التالية : $E=\{(x,y,z)\in IR^3 / x-y+3z=0\}$

1 – بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2 – لتكن $\vec{e}_1=(1,1,0)$ و $\vec{e}_2=(0,3,1)$ متجهتين من E

بين أن الأسرة $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ تولد الفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$

3 – الارتباط و الاستقلال الخطي:

a – تعريف

لتكن $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ أسرة من متجهات الفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$

نقول أن:

الأسرة B مرتبطة خطيا أو مقيدة

$\Leftrightarrow (\exists(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in IR^n) / (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\neq(0,0,\dots,0)$ و $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=o$

الأسرة B مستقلة خطيا أو حرة $\Leftrightarrow \left(\forall(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in IR^n \ ; \ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0\right)$

b – مثال :

في الفضاء المتجهي $(M_2(IR),+,\bullet)$ نعتبر الأسرتين $B_1=(L,J)$ و $B_2=(L,J,K)$ بحيث :

$$L=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \quad و \quad J=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix} \quad و \quad K=\begin{pmatrix}2&6\\3&4\end{pmatrix}$$

لدينا : $2L+3J=2\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6\\3&4\end{pmatrix}=K$

إذن : $2L+3J-K=0$

ومنه ألأسرة $B_2=(L,J,K)$ مقيدة لأن : $2L+3J-K=0$ و $(2,3,-1)\neq(0,0,0)$

من جهة أخرى لدينا :

$$\alpha L+\beta J=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha&0\\0&2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\beta\\\beta&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha&2\alpha\\\beta&2\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \alpha=\beta=0$$

إذن الأسرة $B_1=(L,J)$ حرة

c – خاصيات :

إذا كانت B أسرة مقيدة فإن كل أسرة تتضمن B تكون كذلك مقيدة
إذا كانت B أسرة ضمن أسرة حرة فإن B تكون كذلك حرة

بتعبير أخر :

B أسرة مقيدة و $B\subset B'$ $\Leftarrow$ B' أسرة مقيدة
B أسرة حرة و $B'\subset B$ $\Leftarrow$ B' أسرة حرة

1 – إذا كانت في أسرة B متجهتان متساويتان فإن B تكون مقيدة
2 – إذا كانت أحدى متجهات أسرة B على شكل تأليفة خطية للعناصر الأخرى فإن B تكون مقيدة
3– إذا كانت أسرة Bحرة فإن جميع عناصرها غير منعدمة و مختلفة مثنى مثنى

4 – أساس فضاء متجهي حقيقي:

a – تعريف :

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نقول أن أسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ من متجهات E أساس للفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$ إذا وفقط إذا كانت كل متجهة من E تكتب بكيفية **وحيدة** على شكل تأليفة خطية لمتجهات الأسرة B

بتعبير أخر :

$B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ أساس للفضاء E $\Leftrightarrow (\forall\vec{x}\in E)(\exists!(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in IR^n)\,/\,\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$

الأعداد الحقيقية α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n تسمى إحداثيات المتجهة $\vec{x}$ بالنسبة للأساس $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$

b – مثال :

في $\left(IR^3,+,\bullet\right)$ نعتبر المتجهات التالية : $\vec{e}_1=(1,0,0)$ و $\vec{e}_2=(0,1,0)$ و $\vec{e}_3=(0,0,1)$

لنبين أن الأسرة $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ أساس للفضاء المتجهي $\left(IR^3,+,\bullet\right)$

لتكن $\vec{x}=(a,b,c)\in IR^3$

$$\vec{x}=(a,b,c)=(a,0,0)+(0,b,0)+(0,0,c)$$

لدينا :
$$=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)$$
$$=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3$$

نفترض أنه توجد أعداد حقيقية أخرى a' و b' و c' بحيث : $\vec{x}=a'\vec{e}_1+b'\vec{e}_2+c'\vec{e}_3$

لدينا إذن $a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3=a'\vec{e}_1+b'\vec{e}_2+c'\vec{e}_3 \Rightarrow (a-a')\vec{e}_1+(b-b')\vec{e}_2+(c-c')\vec{e}_3=(0,0,0)$

ومنه: $(a-a')(1,0,0)+(b-b')(0,1,0)+(c-c')(0,0,1)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow (a-a',0,0)+(0,b-b',0)+(0,0,c-c')=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow (a-a',b-b',c-c')=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow a=a' \text{ و } b=b' \text{ و } c=c'$$

إذن كل متجهة من $\left(IR^3,+,\bullet\right)$ تكتب بكيفية ***وحيدة*** على شكل تأليفة خطية لمتجهات الأسرة $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$

و بالتالي $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ أساس للفضاء المتجهي $\left(IR^3,+,\bullet\right)$

c – خاصيات :

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

1	$B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\right)$ أساس للفضاء E $\Leftrightarrow$ B أسرة مولدة وحرة للفضاء المتجهي E عدد متجهات الأساس B يسمى بعد الفضاء التجهي E ونرمز له ب $\dim E$ ($\dim E=card(B)$)
2	إذا كانت α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n إحداثيات متجهة $\vec{x}$ و β_1 و β_2 و $\cdots$ و β_n إحداثيات متجهة $\vec{y}$ فإن $\alpha_1+\beta_1$ و $\alpha_2+\beta_2$ و $\cdots$ و $\alpha_n+\beta_n$ إحداثيات المتجهة $\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$
3	إذا كانت α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n إحداثيات متجهة $\vec{x}$ فإن إحداثيات المتجهة $\lambda\vec{x}$ هي : $\lambda\alpha_1$ و $\lambda\alpha_2$ و $\cdots$ $\lambda\alpha_n$
4	جميع أساسات E مكونة من n متجهة $\Rightarrow \dim E=n$
5	$\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ أساس للفضاء E ($\dim E=2$) $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ $\Leftrightarrow$ حرة $\Leftrightarrow \det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)\neq 0$
6	$\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ أساس للفضاء E ($\dim E=3$) $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ $\Leftrightarrow$ حرة $\Leftrightarrow \det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\neq 0$
7	B و B' أساسين للفضاء E $\Rightarrow card(B)=card(B')$