

## المعادلات التفاضلية

### I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها

المجهول دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.

يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز  $y$  ( وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل  $u, z, f, \dots$  )  
حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال  $y$  التي تحقق هذه المعادلة , و مجموعة هذه الدوال  
تسمى الحل العام للمعادلة , كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل  
يسمى كذلك تكاملا.

### 2- أمثلة

(أ)  $y' = 0$  هي معادلة تفاضلية

الدالة  $y$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $y(x) = 1$  حل خاص للمعادلة

مجموعة الدوال الثابتة على  $\mathbb{R}$  هي الحل العام للمعادلة  $y' = 0$  .

(ب)  $y' = x^2 - 1$  هي معادلة تفاضلية ذات المجهول  $y$  ( يمكن أن نكتب  $y'(x) = x^2 - 1$  )

حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة  $x \rightarrow x^2 - 1$  على  $\mathbb{R}$  .

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي  $x \rightarrow \frac{1}{3}x^2 - x + k$

حيث  $k$  عدد حقيقي اعتباطي .

### II - حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

#### 1/ المعادلة التفاضلية $y' = ay$

\* إذا كان  $a = 0$  فإن  $y' = 0$  أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على  $\mathbb{R}$

\* إذا كان  $a \neq 0$

نعلم أن  $(e^{ax})' = ae^{ax} \forall x \in \mathbb{R}$  اذن  $x \rightarrow e^{ax}$  حل خاص للمعادلة  $y' + ay = 0$

ليكن  $y$  حلا اعتباطيا للمعادلة  $y' + ay = 0$  نضع  $y(x) = z(x)e^{ax}$

ومنه  $y'(x) = z'(x)e^{ax} + az(x)e^{ax}$

أي  $y'(x) = z'(x)e^{ax} + ay(x)$  و بالتالي  $y'(x) - ay(x) = z'(x)e^{ax} = 0$

ومنه  $z'(x) = 0$  و بالتالي  $z(x) = \lambda \forall x \in \mathbb{R}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي

اذن  $y(x) = \lambda e^{ax} \forall x \in \mathbb{R}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي

نلاحظ أن الحالة  $a = 0$  هي ضمن الحالة العامة .

### خاصية

المعادلة التفاضلية  $y' = ay$  تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow \lambda e^{ax}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي.

### نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة  $y' = ay$  يحقق الشرط  $y(x_0) = y_0$  و هي الدالة  $x \rightarrow y_0 e^{a(x-x_0)}$

الشرط  $y(x_0) = y_0$  يسمى الشرط البدئي

### أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية  $y' = 2y$

حلول المعادلة التفاضلية  $y' = 2y$  هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow \lambda e^{2x}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي.

$$-2 \text{ نحل المعادلة التفاضلية } y' = \frac{1}{3}y \text{ ; } y(1) = 2$$

حل المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{1}{3}y$  ;  $y(1) = 2$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ حيث  $x \rightarrow 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$

## 2/ حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

إذا كان  $a = 0$  فإن  $y' = b$  ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال  $f(x) = bx + c$

$$\text{إذا كان } a \neq 0 \text{ فإن } y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a \left( y + \frac{b}{a} \right)$$

$$\text{نضع } z = y + \frac{b}{a} \text{ ومنه } z' = y'$$

$$y' = ay + b \Leftrightarrow z' = az$$

$$\Leftrightarrow z(x) = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \text{ وبالتالي}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$$

## خاصية

ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين حيث  $a \neq 0$   
المعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$  تقبل ما لانهاية من الحلول وهي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي.

## نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة  $y' = ay + b$  يحقق الشرط  $y(x_0) = y_0$  وهي الدالة  $x \rightarrow \left( y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

الشرط  $y(x_0) = y_0$  يسمى الشرط البدئي

## مثال

$$\text{نحل المعادلة التفاضلية } y' = -3y + 2$$

حلول المعادلة التفاضلية  $y' = -3y + 2$  هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ حيث  $x \rightarrow \lambda e^{-3x} + \frac{2}{3}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي.

## III- حل المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

1- المعادلات التفاضلية  $y'' + ay' + by = 0$  حيث  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة

الثانية ذات المعاملات الثابتة

### 2- بعض الحالات الخاصة

$$* \text{ إذا كان } a = b = 0 \text{ فإن } y'' = 0$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad y'(x) = k \Leftrightarrow \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = kx + k'$$

الحل العام للمعادلة  $y'' = 0$  هي مجموعة الدوال  $x \rightarrow kx + k'$  بحيث  $(k; k') \in \mathbb{R}^2$

$$* \text{ إذا كان } b = 0 \text{ فإن } y'' + ay' = 0$$

$$\Leftrightarrow (y')' + ay' = 0 \text{ ومنه } y' \text{ حل للمعادلة } z' + az = 0$$

$$\text{وبالتالي } y'(x) = \lambda e^{-ax} \text{ بحيث } \lambda \text{ عدد حقيقي اعتباطي}$$

اذن الحل العام للمعادلة  $y'' + ay' = 0$  هي الدوال الأصلية  $x \rightarrow \lambda e^{-ax}$

$$\text{أي الدوال } x \rightarrow \frac{-\lambda}{a} e^{-ax} + \mu \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3- حل المعادلة التفاضلية  $E: y'' + ay' + by = 0$  ;  $(a; b) \neq (0; 0)$

- (a) تذكير لنكن  $f$  و  $g$  دالتين معرفتين على نفس المجال  $I$   
تكون  $f$  و  $g$  متناسبتين اذا و فقط اذا كان  $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad g(x) = kf(x)$   
(b) ليكن  $y_1$  و  $y_2$  حلين للمعادلة  $E$  و ليكن  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  بين أن  $\alpha y_1 + \beta y_2$  حل للمعادلة  $E$

خاصية

اذا كان  $y_1$  و  $y_2$  حلين للمعادلة  $E: y'' + ay' + by = 0$  و كان  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  فان  $\alpha y_1 + \beta y_2$  حل للمعادلة  $E$ .

خاصية

كل حل للمعادلة التفاضلية  $E: y'' + ay' + by = 0$  هو تأليفة خطية لحلين غير متناسبين للمعادلة  $E$ .  
ملاحظة لايجاد حل العام للمعادلة التفاضلية  $E: y'' + ay' + by = 0$  يكفي أن نجد حلين خاصين غير متناسبين

(d) - حل المعادلة التفاضلية  $E: y'' + ay' + by = 0$  ;  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ 

لنبحث عن حلول من نوع  $y: x \rightarrow e^{rx}$   $r \in \mathbb{R}$ ;  
حل للمعادلة  $E \Leftrightarrow r^2 e^x + a r e^x + b e^x = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$   
اذن اذا كان  $r$  حل للمعادلة  $r^2 + ar + b = 0$  فان الدالة  $x \rightarrow e^{rx}$  حل للمعادلة  $E$

خاصية

المعادلة  $r^2 + ar + b = 0$  تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية  $E: y'' + ay' + by = 0$  ;  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$   
مميز هذه المعادلة هو  $a^2 - 4b$

الحالة 1 اذا كان  $a^2 - 4b > 0$  فان  $r^2 + ar + b = 0$  تقبل حلين مختلفين  $r_1$  و  $r_2$ .  
الدالتان  $x \rightarrow e^{r_1 x}$  ;  $x \rightarrow e^{r_2 x}$  حلان خاصان للمعادلة التفاضلية  $E$   
نلاحظ أن  $x \rightarrow e^{r_1 x}$  ;  $x \rightarrow e^{r_2 x}$  غير متناسبين

اذن حلول المعادلة  $E$  هي الدوال  $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان.

الحالة 2 اذا كان  $a^2 - 4b = 0$  فان  $r^2 + ar + b = 0$  تقبل حل مزدوج  $r$ .

الدالة  $x \rightarrow e^{rx}$  حل للمعادلة  $E$ . نبين أن  $x \rightarrow x e^{rx}$  حل للمعادلة  $E$ .  
الدالتان  $x \rightarrow e^{rx}$  و  $x \rightarrow x e^{rx}$  غير متناسبتين لأن  $x \rightarrow x \frac{e^{rx}}{e^{rx}}$  غير ثابتة.

اذن حلول المعادلة  $E$  هي الدوال  $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{rx}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان

الحالة 3 اذا كان  $a^2 - 4b < 0$  فان  $r^2 + ar + b = 0$  تقبل جذرين مترافقين  $r_1 = p + iq$  و  $r_2 = p - iq$  ( $q \neq 0$ )

$$e^{r_1 x} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx) = e^{px} \cos qx + i e^{px} \sin qx$$

نبين أن الدالتين  $x \rightarrow e^{px} \cos x$  ;  $x \rightarrow e^{px} \sin x$  حلين للمعادلة  $E$ .

$$\left( p = -\frac{a}{2} ; q = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \right) \text{ لاحظ}$$

و بما أن الدالتين  $x \rightarrow e^{px} \cos x$  ;  $x \rightarrow e^{px} \sin x$  غير متناسبتين فان حلول المعادلة التفاضلية

$E$  هي الدوال  $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان.

خاصية

لنكن المعادلة التفاضلية  $E: y'' + ay' + by = 0$  ;  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  و لنكن  $r^2 + ar + b = 0$  المعادلة المميزة

\*- اذا كان  $a^2 - 4b > 0$  فان المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين  $r_1$  ;  $r_2$   
و حلول المعادلة  $E$  هي الدوال  $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان

\*- اذا كان  $a^2 - 4b = 0$  فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج  $r$ .

و حلول المعادلة  $E$  هي الدوال  $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{rx}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان

\*- اذا كان  $a^2 - 4b < 0$  فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين  $r_1 = p + iq$  و  $r_2 = p - iq$

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال  $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان.

**الحل الذي يحقق**  $y'(x_0) = y'_0$  ;  $y(x_0) = y_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين  $y'(x_0) = y'_0$  ;  $y(x_0) = y_0$  الشرطان  $y'(x_0) = y'_0$  ;  $y(x_0) = y_0$  يسميان الشرطين البدئيين . يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

**ملاحظة**

$$\alpha \cos qx + \beta \sin qx = k \left( \frac{\alpha}{k} \cos qx + \frac{\beta}{k} \sin qx \right) = k (\cos \varphi \cos qx + \sin \varphi \sin qx) = k \cos (qx - \varphi) \quad \text{لدينا}$$

$$\cos \varphi = \frac{\alpha}{k} ; \quad \sin \varphi = \frac{\beta}{k} ; \quad k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{بوضع}$$

تستنتج اذا كان  $a^2 - 4b < 0$  فان  $x \rightarrow ke^{px} \cos (qx - \varphi)$  حيث  $k$  و  $\varphi$  اعتباطيان

**تمرين** 1- حل المعادلة  $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$  و حدد الحل الخاص  $y_1$  حيث  $y_1(0) = 1$  ;  $y_1'(0) = -1$

$$2- \text{ حل المعادلة } y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$3- \text{ حل المعادلة } y'' + 2y' + 5y = 0$$

**الجواب**

$$1- \text{ ليكن } \Delta \text{ مميز } r^2 + 2r - \frac{5}{4} = 0 \quad \text{المعادلة المميزة للمعادلة } y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$$

$$\Delta = 4 + 5 = 9 \quad \text{ومنه } r_1 = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{و } r_2 = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}$$

ومنه حلول المعادلة هي الدوال  $x \rightarrow \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان

لنحدد الحل الخاص  $y_1$  حيث  $y_1(0) = 1$  ;  $y_1'(0) = -1$

$$\text{لدينا } y_1(x) = \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x} \quad \text{ومنه } y_1'(x) = \frac{\alpha}{2} e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5\beta}{2} e^{-\frac{5}{2}x}$$

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{5\beta}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 5\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{اذن } y_1(x) = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{5}{2}x} \right)$$

$$2- \text{ مميز } r^2 + 4r + 4 = 0 \quad \text{المعادلة المميزة للمعادلة } y'' + 4y' + 4y = 0 \quad \text{منعدم ومنه } r = -2$$

و حلول المعادلة E هي الدوال  $x \rightarrow (\alpha + \beta x)e^{-2x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان

$$3- \text{ مميز } r^2 + 2r + 5 = 0 \quad \text{المعادلة المميزة للمعادلة } y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{هو } \Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$$

$$\text{ومنه } r_1 = -1 - 2i \quad \text{و } r_2 = -1 + 2i$$

و حلول المعادلة E هي الدوال  $x \rightarrow e^{-x} (\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x)$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان

**حالات خاصة**

\*- اذا كان  $a > 0$  فان حلول المعادلة التفاضلية  $y'' + ay = 0$  هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما

$$\text{يلي } x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{ax} + \beta \sin \sqrt{ax} \quad \text{حيث } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

\*- اذا كان  $a < 0$  فان حلول المعادلة التفاضلية  $y'' + ay = 0$  هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما

$$\text{يلي } x \rightarrow \alpha e^{\sqrt{-ax}} + \beta e^{-\sqrt{-ax}} \quad \text{حيث } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

**مثال** حل المعادلتين  $y'' - 4y = 0$  ;  $y'' + 2y = 0$

حلل المعادلة  $y'' + 2y = 0$  هي الدوال المعرفة بـ  $x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

حلل المعادلة  $y'' - 4y = 0$  هي الدوال المعرفة بـ  $x \rightarrow \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ .