تذكير لعموميات حول المتتاليات العددية و المتتاليات الحسابية و الهندسية

i. متتالية مكبورة – مصغورة – محدودة : (تذكير)

01. تعريف :

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية. M و m عددين من $\mathbb{R}$.

- $(u_n)_{n\ge n_0}$ مكبورة ب M يكافئ $\forall n\ge n_0; u_n\le M$. (أو $\forall n\ge n_0; u_n<M$)
- $(u_n)_{n\ge n_0}$ مصغورة ب m يكافئ $\forall n\ge n_0; m\le u_n$. (أو $\forall n\ge n_0; m<u_n$)
- $(u_n)_{n\ge n_0}$ محدودة يكافئ إن u_n مكبورة ومحدودة .

02. مثال : نعتبر المتتالية العددية : $(w_n=\dfrac{n+3}{n+4})_{n\in\mathbb{N}}$. بين أن: w_n مكبورة ثم مصغورة على $\mathbb{N}$.

ii. رتابة متتالية :

01. تعريف :

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

1) u_n متتالية تزايدية على I يكافئ $\forall n,m\in I; n<m\Rightarrow u_n\le u_m$.
2) u_n متتالية تزايدية على I يكافئ $\forall n,m\in I; n<m\Rightarrow u_n\le u_m$
3) u_n متتالية ثابتة على I يكافئ $\forall n,m\in I; u_n=u_m$

02. خاصية :

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

- u_n متتالية تزايدية على I يكافئ: $\forall n\in I; u_n\le u_{n+1}$.
- u_n متتالية تناقصية قطعا على I يكافئ: $\forall n\in I; u_n\ge u_{n+1}$
- u_n متتالية ثابتة على I يكافئ: $\forall n\in I; u_{n+1}=u_n$

03. مثال :

نأخذ $w_1=1$ و $w_{n+1}=1+w_n$. أدرس رتابة w_n .

iii. المتتالية الحسابية :

01. تعريف :

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية .

نقول إن u_n متتالية حسابية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم r وحدها الأول u_{n_0} يعني إن $\forall n\ge n_0: u_{n+1}-u_n=r$.

02. مثال: نعتبر المتتالية العددية الآتية : $u_n=2n+3; n\ge 0$. بين أن u_n متتالية حسابية وحدد عناصرها المميزة .

iv. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0}. لدينا : $\forall n\ge n_0: u_n=u_{n_0}+(n-n_0)r$.

02. خاصية :

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r إذا وفقط إذا كان $\forall n,p\ge n_0 : u_n=u_p+(n-p)r$. (مع n و p من $\mathbb{N}$)

03. أمثلة :

- مثال 1 : u_n متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها u_7. أحسب u_{2007}.
- مثال 2 : متتالية حسابية أساسها r وحدها $u_0=5$. أحسب $u_{100}=-45$. حدد r و u_n بدلالة n .

v. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} . $n_0\leq p<n$. لدينا :

$$S_n=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+....+u_n=\left[\frac{u_n+u_p}{2}\right]\times(n-p+1)$$

أو أيضا : (عدد الحدود) $\times$ $S_n=\dfrac{(\text{ le premier terme })+(\text{ le dernier terme })}{2}$

02. ملاحظة :

$S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ هناك $n+1$ من الحدود

$S_n=u_1+u_2+u_3+....+u_n$ هناك n من الحدود

$S_n=u_2+u_3+u_4+....+u_n$ هناك $n-1$ من الحدود

vi. متتالية هندسية :

01. تعريف :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

نقول إن u_n متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم q و حدها الأول u_{n_0} يعني ان $\forall n\geq n_0:u_{n+1}=q\times u_n$

vii. صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0} . لدينا : $\forall n\geq n_0:u_n=u_{n_0}\times q^{(n-n_0)}$

02. خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q إذا وفقط إذا كان $\forall n,p\geq n_0:u_n=u_p\times q^{n-p}$. (مع n و p من $\mathbb{N}$)

03. تمرين :

viii. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0} . $n_0\leq p<n$.

1) لدينا : مع $q\neq 1$:

$$S=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+....+u_n=\left[\frac{q^{(n-p+1)}-1}{q-1}\right]\times u_p$$

2) لدينا : مع $q=1$:

$$S=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+....+u_n=u_p+u_p+u_p+....+u_p=u_p(n-p+1)$$

ix. المعدل الحسابي – المعدل الهندسي : لثلاثة حدود متتابعة .

01. المعدل الحسابي.

$u_i = a$ و $u_{i+1} = b$ و $u_{i+2} = c$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها r .

لدينا : $u_i = u_{i+1} - r$ و $u_{i+2} = u_{i+1} + r$ ومنه : $2u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$.

خلاصة : $a + b = 2c$ وهي تسمى المعدل الحسابي .

02. المعدل الهندسي :
إذا كانت u_n هندسية بالنفس الطريقة نحصل على: $a \times c = b^2$ تسمى المعدل الهندسي.

نهاية متتالية

A. نهاية منتهية لمتتالية

01. نشاط:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_n = \frac{1}{n} + 2 \ ; \ n \geq 1$

على المستقيم العددي نأخذ المجال المفتوح $\left]2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}\right[$ $I_2 = I_{\left(2,\frac{1}{4}\right)}$ الذي مركزه 2 . وحدة القياس $2cm$.

أ – مثل المجال على المستقيم العددي.

ب – أحسب بعض الحدود و مثلها على المستقيم العددي.

ج – ماذا تلاحظ ؟

د – إذا كانت n تؤول إلى $+\infty$. ماذا يمكن أن نقول عن قيم u_n؟

02. مفردات و رموز :

- نقول : توجد رتبة p ابتداء من الرتبة $p = 5$ لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$ فإن $u_n \in \left]2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}\right[$

  نعبر عن ذلك : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n \in \left]2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}\right[$
- نقول إن نهاية المتتالية u_n هي 2 عندما تؤول n إلى $+\infty$
- نكتب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

03. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية.

نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي العدد الحقيقي ℓ إذا كان كل مجال مفتوح مركزه ℓ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

أو أيضا : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |u_n - \ell| < \varepsilon$

.04 ملاحظة:

- إذا كان للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ نهاية فهذه النهاية وحيدة .
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^i}=0$; $(i\in\mathbb{N}^*)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-\ell)=0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=|\ell|$ (العكس غير صحيح مثال $u_n=(-1)^n$)

.05 مثال:

لنعتبر المتتالية $u_n=\frac{1}{n}+3; n\geq 1$

نبين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3-3=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$

B. نهاية اللا منتهية لمتتالية:

.01 تعريف:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية.

- نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هي $+\infty$ إذا كان كل مجال على شكل $]A,+\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

  أو أيضا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists p\in\mathbb{N}, \forall n\geq p, u_n>A$
- نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هي $-\infty$ إذا كان كل مجال على شكل $]-\infty,A[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

  أو أيضا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists p\in\mathbb{N}, \forall n\geq p, u_n<-A$

.02 ملاحظة:

- إذا كان $k>0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}ku_n=+\infty$.
- إذا كان $k<0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}ku_n=-\infty$.

.03 مثال :

$u_n=n^3$. نبين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

لكل $A>0$ نبحث هل يوجد p من $\mathbb{N}$ لكل n يحقق $n\geq p$ يعطينا $u_n>A$.

ليكن $A>0$ حيث $u_n>A$ أي $n^3>A$ ومنه $n>\sqrt[3]{A}$.

وفي هذه الحالة :

نقول لكل $A>0$ يوجد p حيث $p=E\left(\sqrt[n]{A}\right)+1$ لكل n يحقق $n\geq p$ يعطينا $u_n>A$ أو باختصار: نقول لكل $A>0$ يكفي أن نأخذ $p=E\left(\sqrt[n]{A}\right)+1$.

خلاصة : $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

تقارب متتالية عددية

01. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

- إذا كانت نهاية المتتالية u_n منتهية نقول إن المتتالية متقاربة.
- إذا كانت نهاية المتتالية u_n غير منتهية أو u_n ليس لها نهاية نقول إن المتتالية u_n متباعدة.

02. مثال:

- $u_n=\frac{1}{n}$. لدينا: $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ إذن u_n متقاربة.
- $u_n=n^4$. لدينا: $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ إذن u_n متباعدة.
- $u_n=(-1)^n$ ليس لها نهاية: u_n هي متباعدة.

العمليات على نهايات المتتاليات- المتتاليات والترتيب

01. العمليات:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين عدديتين .

- العمليات على المتتاليات هي نفس العمليات على الدوال العددية.

 مثال: $(u_n)_{n\geq n_0}+(v_n)_{n\geq n_0}=(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$
- العمليات على نهايات الدوال العددية هي نفس النهايات على الدوال.

 مثال : أ- $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n=\ell'$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n+v_n=\ell+\ell'$

 مثال : ب - $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n+v_n=+\infty$

02. الترتيب:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ متتاليات عدديتين حيث $\exists p\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}, n\geq p, v_n\leq u_n\leq w_n$

- إذ كان $u_n>0$ فإن $\ell>0$.
- إذا كان (u_n) و (v_n) متقاربتين (أي $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n=\ell'$) و $\exists p\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}, n\geq p, v_n\leq u_n$ فإن $\ell'\leq\ell$
- $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n-\ell=0$.

03. تطبيق:

1) أحسب نهاية المتتالية التالية: $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} 3 = 3$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

2) أحسب نهاية المتتالية التالية: $v_n = \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n}; n \geq 1$.

لديناː $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3$ و $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. ومنه : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n} = +\infty$

مصاديق التقارب

01. نشاط:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ متتاليات عددية حيث ابتداء من الرتبة p (مع $p \geq n_0$) . لدينا ما يلي :

- $v_n \leq u_n \leq w_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ ماذا يمكننا أن نستنتج ؟
- $v_n \geq \alpha . u_n$ (مع $\alpha > 0$) و $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ماذا يمكننا أن نستنتج ؟
- $v_n \leq \alpha . u_n$ (مع $\alpha > 0$) و $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ماذا يمكننا أن نستنتج ؟
- $|v_n - \ell| \leq \alpha . u_n$ (مع $\alpha > 0$) و $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ماذا يمكننا أن نستنتج ؟

02. مصاديق:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ متتاليات عددية .

إذا كان ابتداء من الرتبة p ، لكل n من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$ يتحقق ما يلي:

1. $v_n \leq u_n \leq w_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
2. $v_n \geq \alpha . u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. $v_n \leq \alpha . u_n$ و $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
4. $|v_n - \ell| \leq \alpha . u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

مع $\alpha > 0$ و p عدد صحيح طبيعي معلوم ($p \geq n_0$) و $\ell \in \mathbb{R}$.

03. أمثلة :

1. مثال للمصداق 1:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5 \; ; \; n > 0$

نبين أن: $\lim_{n\to+\infty} v_n = -5$.

لدينا: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ إذن: $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

و منه: $\frac{-1}{n} - 5 \leq \frac{(-1)^n}{n} - 5 \leq \frac{1}{n} - 5$

و بالتالي : $\frac{-1}{n}-5\leq v_n\leq\frac{1}{n}-5$

و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{n}-5=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-5=-5$

ومنه: حسب أحد مصاديق التقارب نحصل: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-5$

خلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-5$

2. مثال للمصداق 2:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $u_n=2n+\cos(n);n\geq0$ أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا: $-1\leq\cos(n)\leq1\Leftrightarrow 2n-1\leq 2n+\cos(n)\leq 2n+1$

ومنه : $2n-1\leq 2n+\cos(n)$ أي $2n-1\leq u_n$

ونعلم بأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}2n-1=+\infty$ إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

خلاصة: $\lim\limits_{n\to+\infty}2n+\cos(x)=+\infty$

3. مثال للمصداق 4:

$v_n=\frac{\cos n}{n}\ ;\ n\geq1$ نبين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

لدينا : (لأن $|\cos n|\leq1$) $|v_n-0|=\left|\frac{\cos n}{n}\right|=\frac{|\cos n|}{n}\leq\frac{1}{n}$

ومنه: $|v_n-0|\leq\frac{1}{n}$ و بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

تمرين : أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos n+5}{n^3}$.

04. خاصية :

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة.

05. مثال :

لنعتبر المتتالية : $u_n=\frac{1}{n^3}+7;n\geq1$.

1) نبين أن: u_n مصغورة:

لدينا: $n\geq1$ إذن $\frac{1}{n}$ موجب قطعا أي $u_n>0$ ومنه $0<u_n$ وبالتالي u_n مصغورة ب 0. خلاصة: u_n مصغورة ب 0

2) نبين أن: u_n تناقصية:

لكل $n\geq1$ لدينا: $n+1\geq n\Leftrightarrow(n+1)^3\geq n^3$

$\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)^3}\leq\frac{1}{n^3}\Leftrightarrow u_{n+1}\leq u_n$

ومنه : u_n تناقصية. خلاصة: حسب ما سبق u_n مصغورة ب 0 و تناقصية إذن هي متتالية متقاربة.

.06 ملحوظة:

- كل متتالية تزايدية و سالبة (أي مكبورة ب 0) هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و موجبة (أي مصغورة ب 0) هي متقاربة.

متتاليات خاصة

A. متتالية على شكل: $u_n = a^n$ مع $a \in \mathbb{R}$.

.01 خاصية:

- إذا كان $a > 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.
- إذا كان $a = 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- إذا كان $-1 < a < 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- إذا كان $a \leq -1$ فإن : a^n ليس لها نهاية.

.02 أمثلة:

- $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$ لأن $a = 3 > 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$.
- $(-1)^n$ ليس لها نهاية.
- **تمرين:** أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n}$

B. متتالية على شكل: $u_n = n^r$ مع $r \in \mathbb{Q}^*$.

.01 خاصية:

- إذا كان $r < 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = 0$.
- إذا كان $r > 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = +\infty$.

.02 تمرين تطبيقي :

- لنعتبر المتتالية التالية: $u_n = \sqrt[7]{n^3} ; n \geq 1$ أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (لاحظ $u_n = \sqrt[7]{n^3} = n^{\frac{3}{7}}$)
- لنعتبر المتتالية التالية: $u_n = \sqrt[7]{n^{-3}} ; n \geq 1$ أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (لاحظ $u_n = \sqrt[7]{n^{-3}} = n^{-\frac{3}{7}}$)

C. متتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ **على شكل:** $v_n = f(u_n)$

.01 نشاط : نعتبر الدالة : $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$ و المتتالية $\left(u_n = \frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 1}$.

1) لنعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة ب : $v_n = f(u_n)$ أكتب v_n بدلالة n.

2) أ – أحسب : $\lim_{n\to+\infty} u_n$. ب - أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$

3) إذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ استنتج علاقة بين $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و f و ℓ . ثم أعط الخاصية :

.02 خاصية :

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية و f دالة متصلة في ℓ و $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ فإن المتتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ المعرفة ب $v_n=f(u_n)$ هي متقاربة و نهايتها تحقق ما يلي: $\lim_{n\to+\infty} v_n=f(\ell)$.

.03 تمرين :

نضع $f(x)=\frac{5x-6}{x+3}$ و $u_n=\frac{\cos n}{n};n\geq 1$.

1) أحسب : $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2) نعتبر $v_n=\frac{5\cos n-6n}{\cos n+3n};n\geq 1$. أكتب v_n بدلالة f و u_n.

3) حدد النهاية التالية $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

D. متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ على شكل: $u_{n+1}=f(u_n)$

.01 خاصية:

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و $f(I)\subset I$ و $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حيث : $u_{n+1}=f(u_n)$

- $u_{n_0}\in I$ (حدها الأول من I).
- u_n متتالية متقاربة و نهايتها ℓ .

فإن ℓ هو حل للمعادلة $f(x)=x$. (أي ℓ تحقق $(\ell=f(\ell)$)

.02 تمرين :

لنعتبر المتتالية : $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n};n\geq 0$ و $u_0=2$. نعتبر أن u_n متقاربة (u_n تزايدية و مكبورة ب).

1) حدد مجموعة اتصال الدالة $f(x)=\sqrt{6+x}$.

2) أعط جدول تغيرات f على D_f .

3) لنعتبر المجال $I=[0,3]$ تحقق بأن $f(I)\subset I$ و $u_0\in I$.

4) حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

C. المتتاليات المتحادية :

.01 تعريف :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين عدديتين .

نقول إن : (u_n) و (v_n) متحاديتان لنعني أن :

1. إحداهما تزايدية و الأخرى تناقصية .
2. $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

.02 تمرين تطبيقي :
لتكن $u_n = \frac{1}{n}$ و $v_n = -\frac{1}{n^2}$ متتاليتين عدديتين .

1. بين أن : (u_n) تناقصية ثم (v_n) تزايدية .
2. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n$. استنتج بأن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متحاديتان .

.03 خاصية :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين متحاديتين .

إذا كانت (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية فإن لكل $n \geq n_0$ لدينا $u_n \leq v_n$.

.04 برهان :

بمأن المتتالية (u_n) تزايدية إذن المتتالية $(-u_n)$ تناقصية .

نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بما يلي : $w_n = v_n - u_n$. المتتالية (w_n) لأنها مجموع متتاليتين تناقصيتين .

من جهة أخري $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ إذن $w_n \geq 0$ أي $w_n = v_n - u_n \geq 0$ و بالتالي $v_n \geq u_n$.

خلاصة : $u_n \leq v_n$.

.05 خاصية :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين متحاديتين . لدينا :

- (u_n) و (v_n) متقاربتان.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$

.06 برهان :

ملحوظة : إذا كانت (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$ فإن $u_n \leq \ell \leq v_n$ الرتابة قطعا $u_n < \ell < v_n$

حالة 1 : (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية (نفس البرهان ل (u_n) تناقصية و (v_n) تزايدية).

(u_n) تزايدية إذن : $u_{n_0} \leq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. (v_n) تناقصية إذن : $v_n \leq v_{n_0}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

ومنه : $u_{n_0} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n_0}$ و و ذلك لكل $n \geq n_0$.

إذن : المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة ب v_{n_0} إذن (u_n) متقاربة . نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

إذن : المتتالية (v_n) تناقصية و مصغورة ب u_{n_0} إذن (u_n) متقاربة . نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$.

بمأن : $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين متحاديتين إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \Leftrightarrow \ell' - \ell = 0 \Leftrightarrow \ell' = \ell$.

خلاصة : $\ell' = \ell$