دراسة الدوال

A– الانــشطة

تمرين1

1- حدد رتابة الدالة f و مطاريفها النسبية أو المطلقة إن وجدت في الحالات التالية .

أ- $f(x)=x(x-3)^2$ ب- $f(x)=x-\arctan x$ ج- $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$

2- حدد عدد جذور المعادلة $x^3+2x^2-7x+1=0$

تمرين 2

أدرس تقعر C_f منحنى الدالة و حدد نقط انعطافه في الحالتين التاليتن(إن كان ممكنا) .

أ- $f(x)=x^4-2x^3-13x$

ب- $f(x)=x|x|$ (لاحظ أن f غير قابلة للاشتقاق مرتين في 0 و مع ذلك تقبل نقطة انعطاف في O(0 ; 0))

ج- $f(x)=\cos x-\sin x$

تمرين 3

حدد المقاربات إن وجدت - أعط الاتجاهات المقاربة في الحالات التالية

أ- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{-2x^2+x+3}$ ب- $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ج- $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$

د - $f(x)=x+\sqrt{x}$ ر- $f(x)=x+\sin 2\pi x$

تمرين4

1- نعتبر $f(x)=x^3-3x^2+x+3$ بين ان A (1 ;2) مركز تماثل للمنحنى C_f

2- نعتبر $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

بين ان المستقيم الذي معادلته $x=\dfrac{5}{2}$ محور تماثل للمنحنى C_f

B- تذكير مع بعض الاضافات

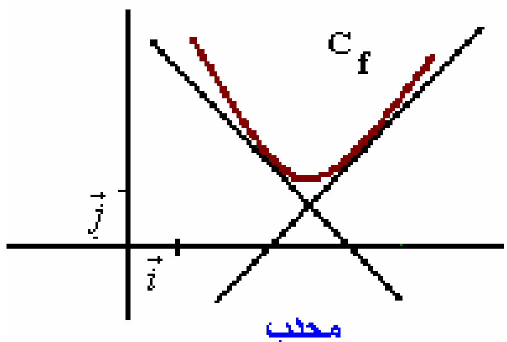
1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

1-1تعــريف

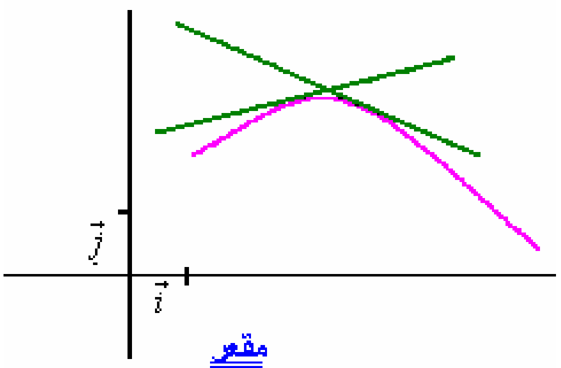
لتكن f قابلة للاشتـــــقاق على مجال I

نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماسـاته

نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماسـاته



محدب

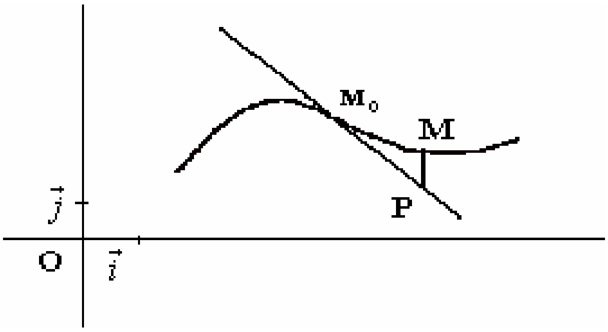


مقعر

2-1 تعـــريف

لتكن f قابلة للاشتــقاق على مجال I و(T) مماسا للمنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;f(x_0))$.

لتكن M و P نقطتين لهـــــما نفس الافصول وينتميان على التوالي إلى (C_f) و(T) إذا انعدم $\overline{PM}$ في x_0 و تغيرت إشارته في مجال مفتوح مركزه x_0 فان النقـــــــطة M_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)



3-1 خـــاصيات

f دالة قابلة الاشتــــــقاق مرتين على مجال I

* إذا كانت" f موجبة علىI فان (C_f) يكون محدبا على I
* إذا كانت" f سالبة علىI فان (C_f) يكون مقعرا على I
* اذا كانت " f تـنعدم في x_0 من الـمجال I وكان يـوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة " f على $]x_0, x_0+\alpha[$ مخالـفة لإشارة " f على$]x_0-\alpha, x_0[$ فان $M_0(x_0; f(x_0))$ نقـطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ملاحظـــــــة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

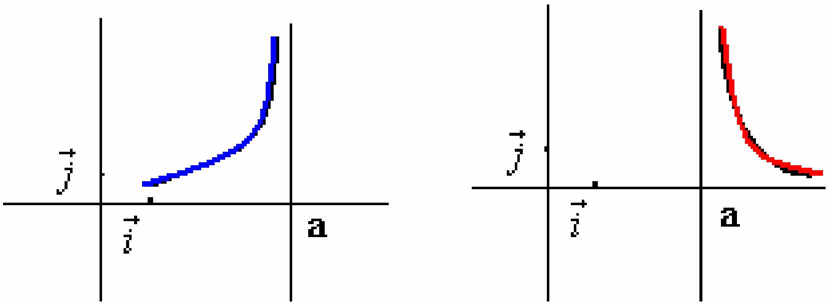
- الفروع اللانهــــائية

1-2 تعريف

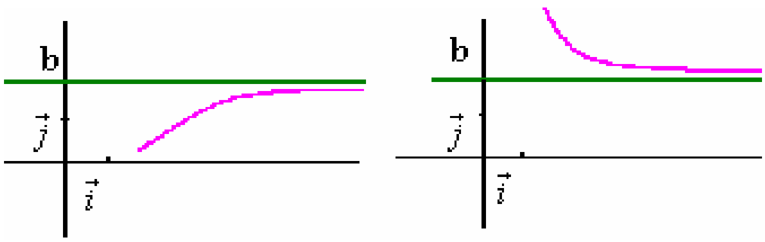
إذا آلت إحدى إحداثـــيتي نقـطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

* اذا كان $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب ل C_f



* إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم ذا المعادلة y =b مقارب ل C_f.



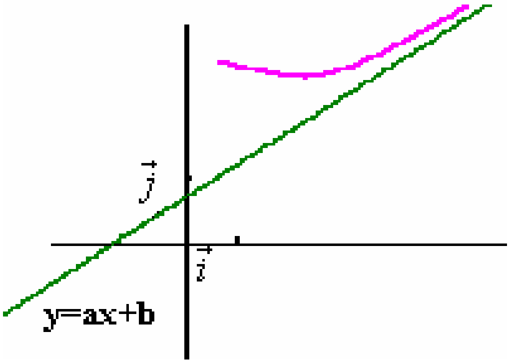
** يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

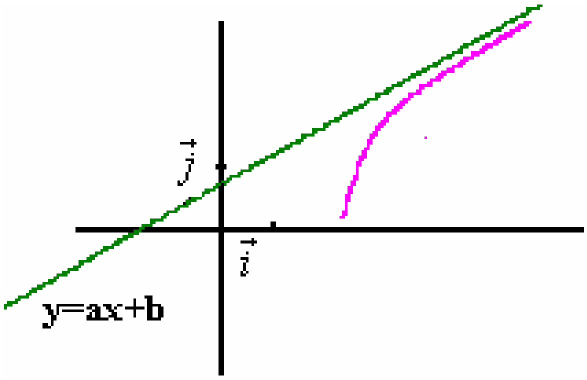
$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

خا صية

يكون المستقيم ذو المعادلة y = ax + b مقارب y لمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

$$\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b\right) \quad \text{أو} \quad \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b\right)$$





ملاحظة دراسة إشارة (f (x) – (ax + b)) تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.

2- 3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب.

ب - إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ نقول إن (C_f) يقبل محور الافاصيل كاتجاه مقارب.

ج - إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب

بصفة عامة

إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب.

3 - مركز تماثل – محور تماثل

3- 1 خاصية

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته x = a محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان

$f(2a-x) = f(x) \qquad \forall x \in D_f$

3-2 خاصية

في معلم ما,تكون النقطة E (a ;b) مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان $f(2a-x) = 2b - f(x) \qquad \forall x \in D_f$

4- الدالة الدورية

4-1 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث

$f(x+T) = f(x) \qquad x-T \in D_f \; ; \; x+T \in D_f \qquad \forall x \in D_f$

العدد T يسمى دور الدالة f .اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالة f

4- 2 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $f(x+nT) = f(x) \qquad \forall x \in D_f, \forall n \in \mathbb{Z}$

4-3 خاصية

إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فان منحنى الـدالة f على $D_f \cap [x_0+nT; x_0+(n+1)T[$ هـو صورة منحنى الدالة على $D_f \cap [x_0, x_0+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT \cdot \vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسـبي.

Moustaouli Mohamed