



ملحوظة:

في جميع الفقرات من هذا الدرس f دالة عددية للمتغير الحقيقي x و (C_f) منحناها في (m, m, m) معلم متعامد ممنظم (O, \bar{i}, \bar{j}) .

1. الاشتقاق وتطبيقاته:

01. المشتقة الأولى

(A) رتبة دالة عددية:

1. خاصية:

- f قابلة للاشتقاق على مجال I .
- إذا كانت $f' > 0$ على I فإن f تزايدية قطعاً على I (يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقاط المنعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتبة f)
- إذا كانت $f' < 0$ على I فإن f تناقصية قطعاً على I . (نفس الشيء يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقاط المنعزلة من I)
- إذا كانت $f' = 0$ منعدمة على I (بكامله) فإن f ثابتة على I

2. مثال: أدرس تغيرات f على \mathbb{R} مع $f(x) = (2x+4)^2$.

(1) حساب f' : لدينا: $f'(x) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

(2) إشارة f' : لدينا: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$

إذن: f' موجبة على $\dots\dots\dots$ و سالبة على $\dots\dots\dots$ ومنه جدول تغيرات f :

02. الدالة المشتقة الثانية وتطبيقاتها:

(A) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس ل (C_f) في نقطة x_0

1. خاصية:

f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I و x_0 من I .

- إذا كان $f''(x_0) \geq 0$ فإن المنحنى (C_f) يوجد فوق المماس ل (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 .
- إذا كان $f''(x_0) \leq 0$ فإن المنحنى (C_f) يوجد تحت المماس ل (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 .

2. مثال: نعتبر الدالة: $f(x) = x^3$

(1) أحسب: $f''(x)$ ثم أعط إشارتها.

(2) أنشئ بعض المماسات على المجال $[0, +\infty[$ ثم على $]-\infty, 0]$.

(B) تقعر منحنى (C_f) - نقط انعطاف (C_f) :

1. تعريف:

دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . (C_f) منحنى f في معلم.



منحنى f محدب (convexe) على I إذا كان (C_f) يوجد فوق جميع مماساته على I . ونرمز له ب



منحنى f مقعر (concave) على I إذا كان (C_f) يوجد تحت جميع مماساته على I . ونرمز له ب

$M_0(x_0, y_0)$ نقطة من (C_f) . (T) المماس ل (C_f) في M_0 . النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف ل (C_f)

يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) (C_f) في M_0



2. خاصية :

- f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I .
- إذا كان : $\forall x \in I / f''(x) \geq 0$ فإن (C_f) محدب (convexe) على I (أو أيضا (C_f) له تقعر موجه نحو الأرتيب الموجبة).
 - إذا كان : $\forall x \in I / f''(x) \leq 0$ فإن (C_f) مقعر (concave) على I (أو أيضا (C_f) له تقعر موجه نحو الأرتيب السالبة).
 - الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في x_0 من I و تتغير إشارتها بجوار x_0 النقطة التي أفصولها x_0 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) (أو للدالة f).

3. مثال: (أنظر ورقة الأنشطة المثال 2)

لنعتبر الدالة f حيث إشارة دالتها المشتقة الثانية f'' هي بواسطة الجدول التالي:

أعط تقعر (C_f) منحنى الدالة f

C) نقط انعطاف: POINTS D'INFLEXIONS

1. تعريف:

(C_f) منحنى دالة عددية f في معلم $M_0(x_0, y_0)$ نقطة من (C_f) . (T) المماس ل (C_f) في M_0 .

النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف ل (C_f) يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) (C_f) في M_0

2. مثال: لنعتبر الدالة $f(x) = x^4 - 6x^2$

نقطتي انعطاف ل (C_f) $A\left(\begin{matrix} 1 \\ -5 \end{matrix}\right)$ و $B\left(\begin{matrix} -1 \\ -5 \end{matrix}\right)$

3. خاصية:

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I . x_0 من I .

الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في x_0 من I و تتغير إشارتها بجوار x_0 النقطة التي أفصولها x_0 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) (أو للدالة f).

مثال 1:

1. هل الدالة f تقبل نقط انعطاف حدها؟
2. أنشئ نقط انعطاف (C_f) . إذا كان ممكن.

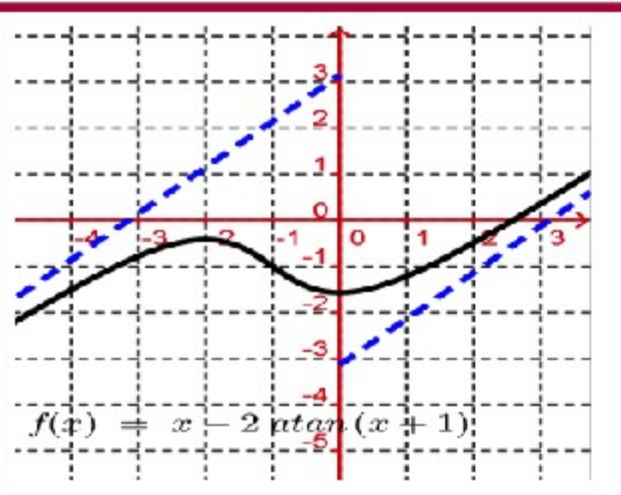
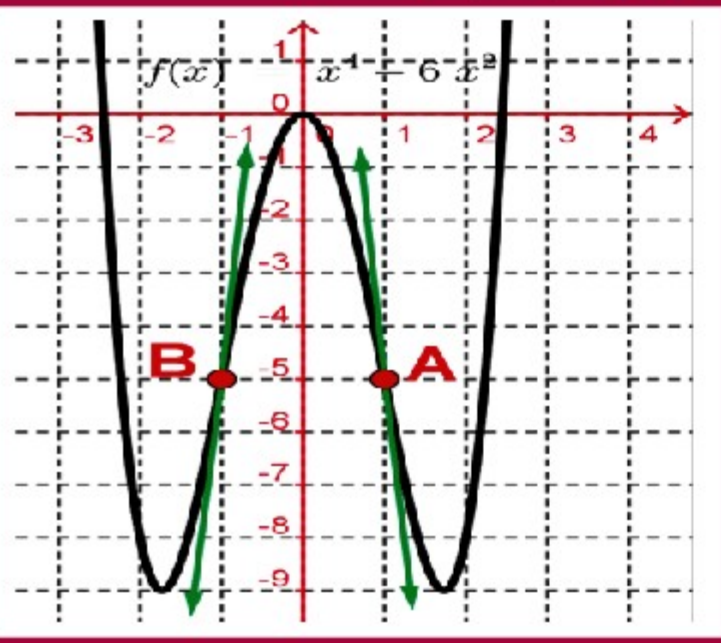
II. الفروع اللانهائية لمنحنى دالة f :

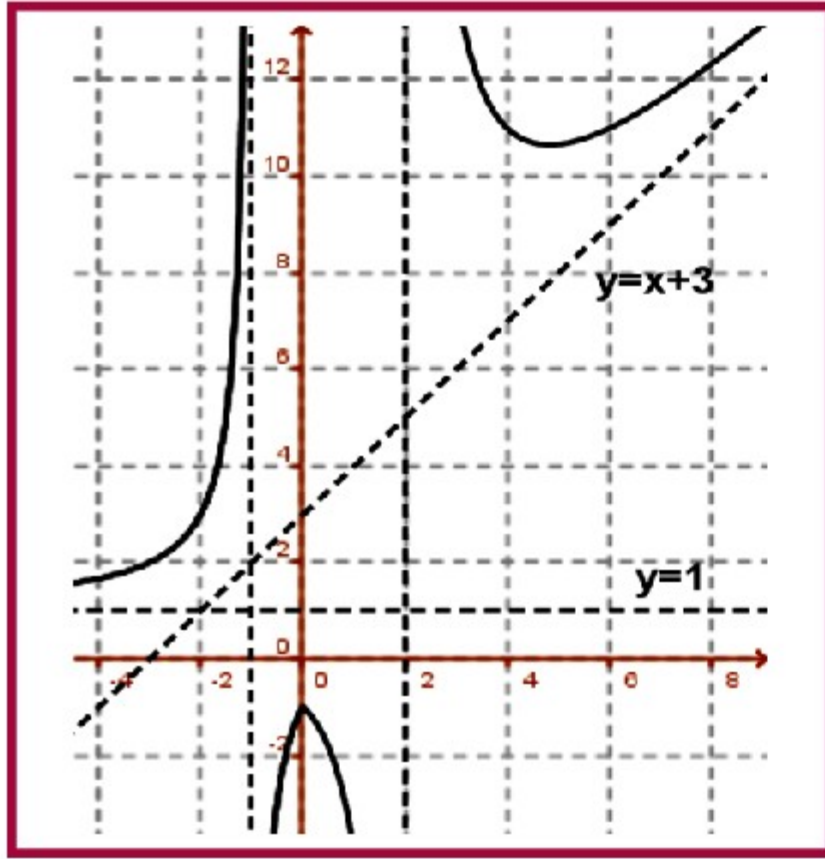
A) فرع اللانهائي:

1. تعريف:

(C_f) منحنى دالة عددية f في معلم. إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة M من (C_f) إلى ما لا نهاية فإن (C_f) يقبل فرع اللانهائي.

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	-	0	+
تقعر (C_f)						





2. نشاط:

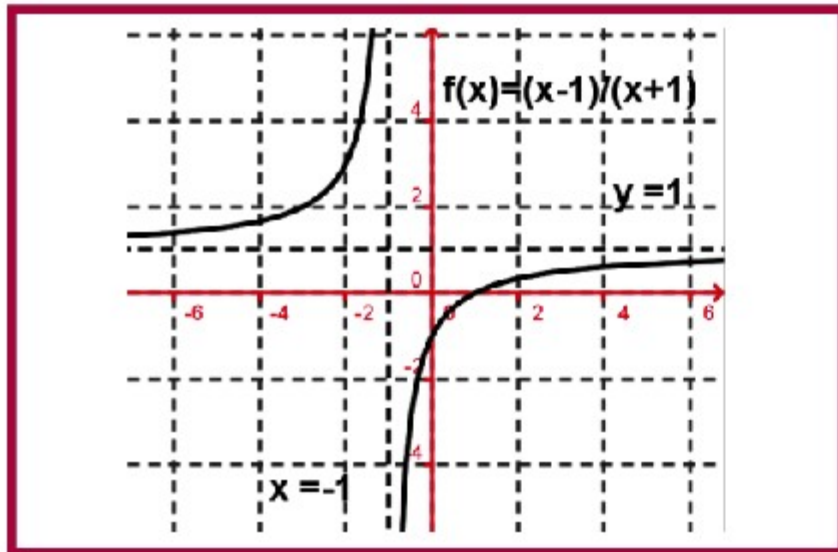
- (1) حدد الفروع اللانهائية ل (C_f) .
- (2) أعط تعاريف لكل نوع من هذه الفروع اللانهائية.

(B) مقارب أفقي - ASYMPTOTE HORIZONTALE

1. تعريف:

f دالة عددية معرفة على $[a, +\infty[$ (أو $]-\infty, a]$).

إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$) فإن المستقيم ذي المعادلة $y=b$ (أو $y=c$) مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$).



2. مثال: $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ إذن المستقيم ذي المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $+\infty$.

(C) مقارب عمودي - ASYMPTOTE VERTICALE

1. تعريف:

f دالة عددية معرفة $D \setminus \{x_0\}$ (أي f غير معرفة في x_0)

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ (أو $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$) فإن المستقيم ذي المعادلة $x = x_0$ مقارب عمودي ل (C_f) عند x_0 (على اليمين) أو على اليسار).

2. مثال: $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ لدينا: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذي المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي ل (C_f) .

(D) مقارب مائل - ASYMPTOTE OBLIQUE

تعريف:

f دالة عددية معرفة على $[a, +\infty[$ (أو $]-\infty, a]$ (C_f) منحنى دالة عددية f في معلم. المستقيم ذي المعادلة $y = ax + b$ (أو $y = a'x + b'$) هو مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) يعني:

$$\left(\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0 \end{cases} \right) \text{ أو } \left(\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \end{cases} \right)$$



■ مثال: لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1}$

بين أن: (C_f) يقبل مقارب مائل بجوار $+\infty$. نحسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

خلاصة: المستقيم ذي المعادلة $y = x - 2$ يسمى مقارب مائل بجوار ∞ ل (C_f) .

■ ملاحظات:

- ❖ إذا كان $f(x) - (ax+b) \geq 0$ فإن (C_f) يكون فوق المقارب المائل الذي معادلته $y = ax+b$.
- ❖ إذا كان $f(x) - (ax+b) \leq 0$ فإن (C_f) يكون تحت المقارب المائل الذي معادلته $y = ax+b$.
- ❖ إذا كان $f(x) - (ax+b) = 0$ فإن (C_f) يقطع المقارب المائل الذي معادلته $y = ax+b$.

■ تحديد: a و b

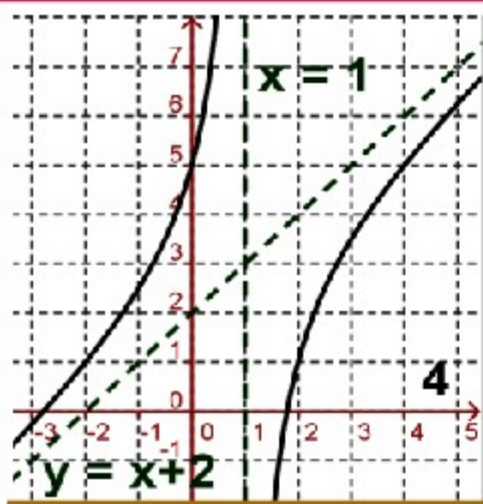
تحديد a و b مع الحالات الخاصة:

لتحديد a نحسب: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$

- إذا كان $a = 0$ نقول أن: (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل. (أنظر الرسم 1).
- إذا كان $a = \infty$ نقول أن: (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأرتيب. (أنظر 7 الرسم 2)
- $a \in \mathbb{R}^*$ (أي $a \neq 0$ و $a \neq \infty$) و $b = \infty$ في هذه الحالة نبحث عن b .

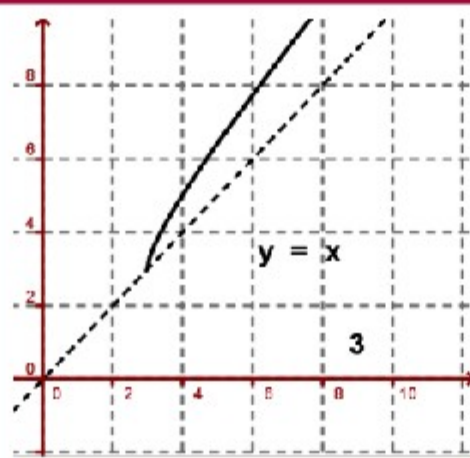
لتحديد b نحسب: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$. بشرط $a \in \mathbb{R}^*$ (أي $a \neq 0$ و $a \neq \infty$).

- $b = \infty$ هذه الحالة نقول أن: (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = ax$ بجوار ∞ . أو أيضا: (C_f) يقبل اتجاه مقاربي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = ax$ بجوار ∞ . (أنظر الرسم 3)
- $b \in \mathbb{R}$ (حتى $b = 0$) في هذه الحالة نقول أن: (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y = ax+b$. (أنظر الرسم 4)



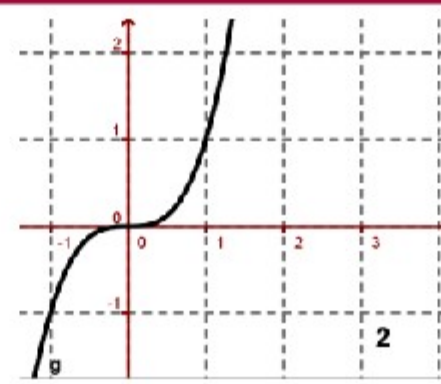
$$f(x) = x + 3 - \frac{(x+2)}{(x-1)}$$

منحنائها يقبل مقارب مائل
معادلته $D: y = x + 2$



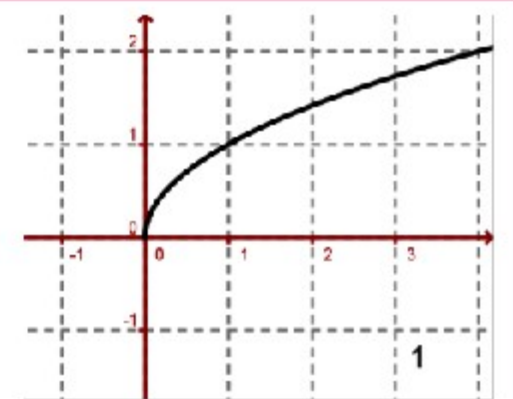
$$f(x) = x + \sqrt{x-3}$$

منحنائها يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم $D: y = x$



$$f(x) = x^3$$

منحنائها يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأرتيب



$$f(x) = \sqrt{x}$$

منحنائها يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل

2. ملحوظة:

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax+b) = c$ فإن (C_f) يقبل مقارب مائل الذي معادلته $y = ax+b+c$ بجوار ∞ .



3. مثال: $f(x) = x + 3 - \frac{(x+2)}{(x-1)}$

لدينا: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x+3) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -\frac{(x+2)}{(x-1)} = -1$ و منه المستقيم الذي معادلته $y = x + 2$ مقار مائل ل (C_f) بجوار $\pm\infty$.

III. محور تماثل - مركز تماثل منحنى .

(A) مركز تماثل منحنى :
خاصية:

f دالة عددية معرفة D_f . (C_f) منحنى على D_f في معلم $I(a, b)$ نقطة من المستوى (P) .
النقطة $I(a, b)$ هي مركز تماثل ل (C_f) يكافئ :
 $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) + f(x) = 2b \end{array} \right.$

(B) محور تماثل ل (C_f) :
خاصية:

f دالة عددية معرفة D_f . (C_f) منحنى على D_f في معلم م.م. $D: x = a$ مستقيم من المستوى (P) .
المستقيم الذي معادلته $D: x = a$ هو محور تماثل ل (C_f) يكافئ :
 $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) = f(x) \end{array} \right.$

مثال: $f(x) = (x-1)^2 + 1$ حدد محور تماثل (C_f)

IV. مجموعة دراسة دالة
I. تعاريف:

f دالة عددية معرفة على $D_f = I \cup I'$ حيث I و I' متماثلين بالنسبة ل 0 مع I يحتوي على الأعداد الموجبة و I' يحتوي على الأعداد السالبة.

إذا كانت f زوجية أو فردية يكفي دراسة على المجموعة $D_E = I$ أو $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$.

أ- تغيرات f على I' هي نفس تغيرات f على I إذا كانت f فردية.

ب- تغيرات f على I' هي عكس تغيرات f على I إذا كانت f زوجية.

إذا كانت f دورية و دورها $P = T$ يكفي دراسة على $D_E = D_f \cap J$ مع J مجال طوله T . $D_E = D_f \cap [a, a+T]$ مع $a \in \mathbb{R}$

2. مثال:

$f(x) = \sin(x)$ هي معرفة على \mathbb{R} ودورية ودورها 2π أي دراستها على مجال طوله $P = T$:

$D_E = \mathbb{R} \cap [0, 2\pi[= [0, 2\pi[$ أو $D_E = \mathbb{R} \cap [0, 2\pi] = [0, 2\pi]$ أو $D_E = \mathbb{R} \cap [-\pi, \pi[= [-\pi, \pi[$ أو

3. ملحوظة:

إذا كانت f دورية و دورها $P = T$ زوجية (أو فردية) على D_f يكفي دراستها على مجال طوله $\frac{T}{2}$ أي $D_E = D_f \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$ أو

$$D_E = \mathbb{R} \cap \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right]$$



4. مثال:

- **مثال 1:** $f(x) = \sin(x)$ هي معرفة ودورية وفردية على \mathbb{R} ودورها $T = 2\pi$. ندرس الدالة f على مجال طوله π .
خلاصة: مجموعة دراسة الدالة هي $D_E = \mathbb{R} \cap [0, \pi] = [0, \pi]$ أي $D_E = [0, \pi]$.
- **مثال 2:** $f(x) = \cos(x)$ هي معرفة على \mathbb{R} . ودورية ودورها 2π و زوجية. ندرسها على مجال طوله π .
خلاصة: مجموعة دراسة الدالة هي $D_E = \mathbb{R} \cap [0, \pi] = [0, \pi]$ أي $D_E = [0, \pi]$.

V. تصميم دراسة دالة عددية :

1	مجموعة تعريف الدالة f : D_f	8	دراسة إشارة f' على D_f أو D_E
2	دراسة زوجية f أو دورية f (إذا كان ذلك ممكن)	9	إعطاء جدول تغيرات f على D_f أو D_E
3	استنتاج مجموعة دراسة f : D_E	10	إذا كان ذلك ممكن دراسة تقعر أو نقط انعطاف f
4	نهايات f عند محداث D_f أو D_E	11	إنشاء (1) المعلم - (2) المقاربات - (3) بعض المماسات (حيث $f'(x) = 0$ أو نقط انعطاف f إذا كان ممكن..-) (4) إنشاء (C_f)
5	استنتاج الفروع اللانهائية ل f	12	هناك بعض الأسئلة الإضافية مثل حل مبيانيا المعادلة $x \in D_f / f(x) = m$ و $x \in D_f / f(x) = g(x)$ أو المتراجحة $x \in D_f / f(x) \leq 0$..
6	دراسة الوضع النسبي للمنحنى f و المقارب المائل (إذا كان ذلك ممكن)	13	ثم دراسة الدالة $g(x) = \sqrt{f(x)}$ أو $g(x) = f(x)$
7	حساب الدالة المشتقة f' ل f على D_f أو D_E	14	أو أسئلة أخرى ربط هذه الدالة بالفيزياء أو

VI. مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \text{ وليكن } (C_f) \text{ منحنى } f \text{ في م.م.م } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

- (1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
- (2) أحسب النهايات عند محداث D_f .
- (3) حدد a ; b ; c من \mathbb{R} : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} \forall x \in D_f$
- (4) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .
- (5) أدرس الوضعية النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة لمقاربه المائل.
- (6) أحسب $f'(x)$ لكل x من D_f .
- (7) أدرس إشارة f' على D_f ثم أعط جدول تغيرات f .
- (8) أدرس تقعر المنحنى (C_f) على D_f .
- (9) بين أن النقطة $I(1,1)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) .