دالة الجذر من الرتبة n $(n \in \mathbb{N}^*)$

القوى الجذرية

ذ. محمد الكيال

خاصية وتعريف:

الدالة : $x \mapsto x^n$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ تقبل دالة عكسية تسمى دالة الجذر من الرتبة n

ويرمز لها بالرمز: $\sqrt[n]{\ }$

$$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

حالات خاصة:

- $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$
- العدد : $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجذر المكعب ل x

خاصيات:

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$\sqrt[n]{x^n} = x$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$
$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$
$$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$$

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \forall (m;n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$$
$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$
$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \qquad (y \neq 0)$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$$

ملاحظة هامة:

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$	$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f هي :
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$D_f = [0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) \geq 0\}$

النهايات:

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)}$
$\ell \geq 0$	$\sqrt[n]{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

ولدينا :

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I

فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا :

$$\forall x \in I \qquad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}}$$

حل المعادلة: $x^n = a$ $\quad x \in \mathbb{R} \quad (a \in \mathbb{R})$

	n عدد فردي	n عدد زوجي
$a > 0$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$S = \{-\sqrt[n]{a};\sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\}$	$S = \varnothing$

القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا:

ليكن $r = \frac{p}{q}$ عددا جذريا غير منعدم حيث : $p \in \mathbb{Z}^*$ و $q \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

ملاحظات:

- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad \forall x \in]0;+\infty[$
- مجموعة تعريف دالة عددية f لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = [u(x)]^r \quad (r \in \mathbb{Q}^*)$

  هي : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]^{\frac{1}{n}-1}$

لكل عنصرين x و y من $\mathbb{R}_+^*$ ولكل عنصرين r و r' من $\mathbb{Q}^*$

- $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$
- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$
- $(x \times y)^r = x^r \times y^r$
- $\frac{1}{x^{r'}} = x^{-r'}$
- $\left(\frac{x^r}{x^{r'}}\right) = x^{r-r'}$