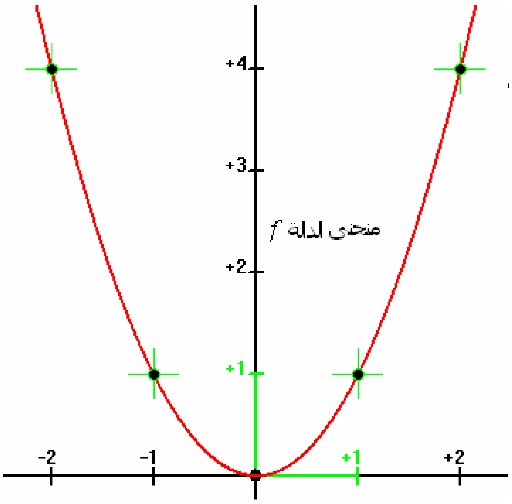
الدوال العكسية

I- صورة مجال بدالة متصلة :

1 – مثال :

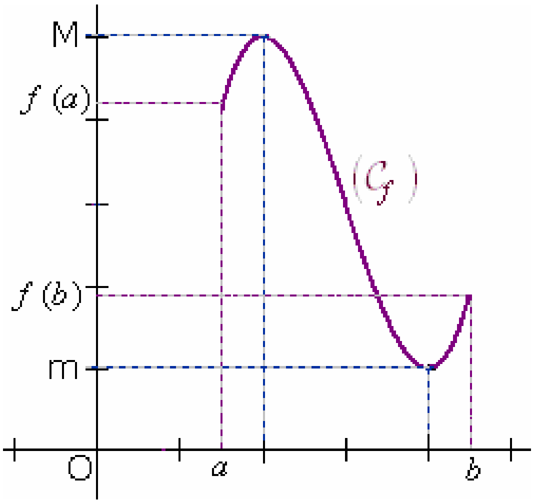
نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2$.

حدد مبيانيا ما يلي :



- ✓ $f([1,2])$
- ✓ $f([-1,1])$
- ✓ $f([-2,0])$

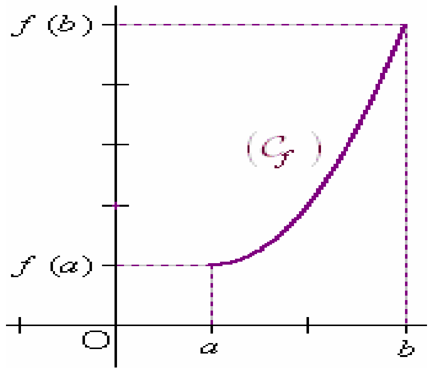
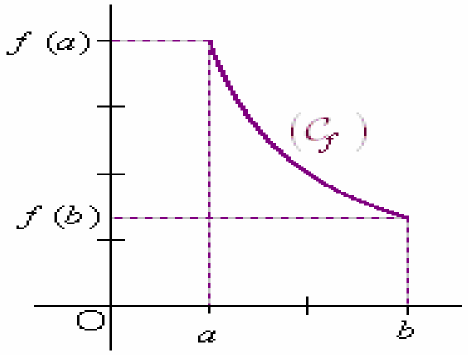
2 - خاصيات :



- ✓ صورة قطعة بدالة متصلة هي أيضا قطعة . $(\mathcal{C}_f)$
- ✓ صورة مجال من $\mathbb{R}$ بدالة متصلة هي أيضا مجال من $\mathbb{R}$.
- ✓ $f([a,b])=[m,M]$.

$M=\underset{x\in[a,b]}{Max} f(x)$ و $m=\underset{x\in[a,b]}{Min} f(x)$

ملاحظة : يمكن تحديد صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال من $\mathbb{R}$ كما يلي :

المجال $f(I)$	المجال I	رتابة الدالة f	الشكل
$[f(a),f(b)]$	$[a,b]$	f تزايدية قطعا على المجال I	
$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$[a,b[$		
$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),f(b)\right]$	$]a,b]$		
$\left[f(a),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$[a,+\infty[$		
$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$]a,+\infty[$		
$[f(b),f(a)]$	$[a,b]$	f تناقصة قطعا على المجال I	
$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)\right]$	$[a,b[$		
$\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$]a,b]$		
$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),f(a)\right]$	$[a,+\infty[$		
$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$]a,+\infty[$		

مثال : نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x-3}{x-2}$.

1. بين أن f تزايدية قطعا على كل من المجالين التاليين : $]2,+\infty[$ و $]-\infty,2[$.
2. استنتج صور كل من المجالات التالية بالدالة f : $]2,+\infty[$ و $[3,+\infty[$ و $[3,4]$.

II- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال من $\mathbb{R}$:

1. تعريف التقابل :

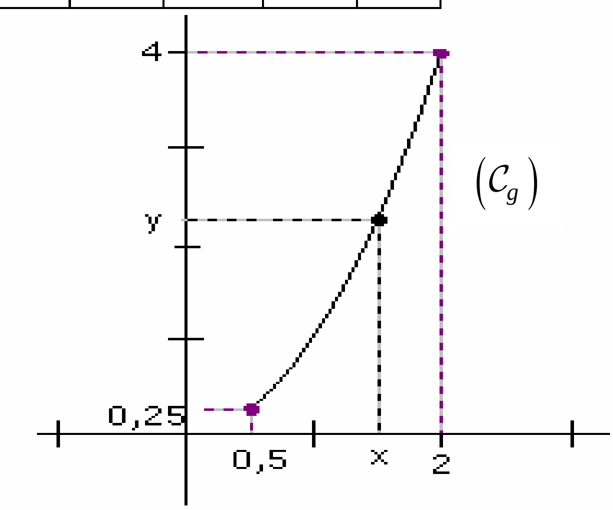
مثال 1:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,5;2]$ بما يلي : $g(x)=x^2$.

1 – حدد مبيانيا $g([0,5;2])$.

2 – أتمم الجدول التالي :

y	0,25	1	2	3	4
سوابق y					



ملحوظة: نسمي سوابق y ، بالدالة g ، كل عنصر x من المجال $[0,5;2]$ بحيث : $y=g(x)$.

استنتاج : من خلال المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ ؛ نلاحظ أن كل عنصر y من المجال $[0,25;4]$ ؛ يقبل سابقا وحيدا x، بالدالة g ، في المجال $[0,5;2]$. لهذا نقول إن g **تقابل** من المجال $[0,5;2]$ نحو المجال $[0,25;4]$.

مثال 2 : نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $[-1,2]$ بما يلي : $h(x)=x^2$.

1- حدد $h([-1,2])$.

2- املأ الجدول التالي :

3- ما ذا تستنتج ؟

y	0	0,25	1	3	4
سوابق y					

تعريف : لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين ؛ ولتكن f دالة معرفة من A نحو B .
نقول إن f تقابل من A نحو B ؛ إذا كان لكل عنصر y من B ؛ سابق وحيد x في A بالدالة f

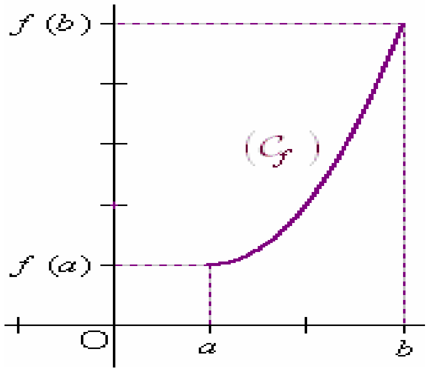
أي : $\boxed{\forall y\in B;\quad \exists! x\in A\quad / \quad y=f(x)}$

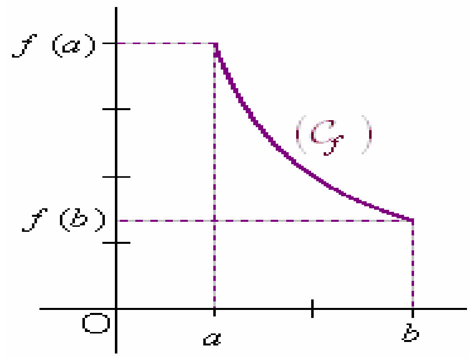
2. خاصية :

$(a<b)$

لتكن f دالة عددية وليكن I و J مجالين غير فارغين من $\mathbb{R}$ بحيث : $I\subset D_f$.

إذا كانت f **متصلة** و**رتيبة قطعا** على المجال I ؛ فإنها تكون تقابلا من I نحو المجال J بحيث: $J=f(I)$.





مثال : الدالة الواردة في المثال1، من II-1 $\left(f(x)=x^2\right)$، تقابل من المجال $[0,5;2]$ نحو المجال $[0,25;4]$.

3. التقابل العكسي :

مثال 1 : لتكن f دالة معرفة على المجال $I=[1,2]$ بما يلي : $f(x)=x^2-2x+3$

1- بين أن f تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده .

2- ليكن $y\in J$ وليكن $x\in I$ السابق الوحيد ل y بالدالة f . أكتب x بدلالة y ؟

الجواب : 1- ليكن $x\in I$. لدينا : $f'(x)=\left(x^2-2x+3\right)'=2x-2=2(x-1)$. ومنه فإن :

$x\in]1,2]\Rightarrow 1<x\le 2\Rightarrow x-1>0\Rightarrow f'(x)>0$.

إذن $f'>0$ على المجال I باستثناء العدد 1 حيث $f'(1)=0$. ومنه نستنتج أن f دالة تزايدية قطعا على المجال I . وبما أن f متصلة على المجال I ، فإن :

f تقابل من المجال I نحو المجال $J=f(I)=f([1,2])=[f(1),f(2)]=[2,3]$.

2- ليكن $y\in J$ وليكن $x\in I$ السابق الوحيد ل y بالدالة f لدينا :

$$\begin{aligned}
y=f(x) &\Leftrightarrow y=x^2-2x+3\\
&\Leftrightarrow y=(x-1)^2+2\\
&\Leftrightarrow (x-1)^2=y-2\\
&\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y-2} \quad \text{أو} \quad x-1=-\sqrt{y-2}\\
&\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y-2} \quad (\text{لأن : } x\ge 1\Rightarrow x-1\ge 0)\\
&\Leftrightarrow \boxed{x=1+\sqrt{y-2}}
\end{aligned}$$

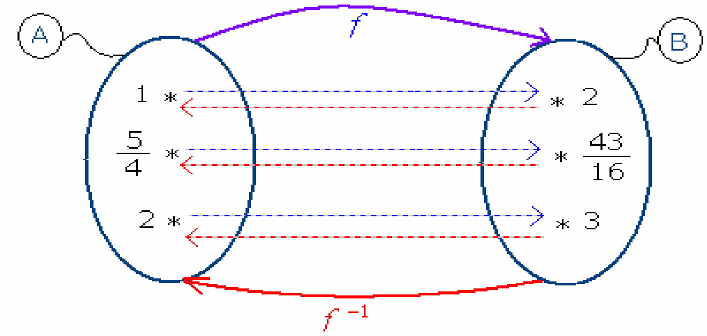
الدالة المعرفة من المجال $J=[2,3]$ نحو المجال $I=[1,2]$ والتي تربط كل عنصر t من المجال J بالعدد الحقيقي $1+\sqrt{t-2}$ ، تسمى التقابل العكسي للدالة f ؛ ونرمز له بالرمز f^{-1} ؛ ونكتب :

$$\begin{array}{rcl}
f^{-1}:\ J=[2,3] & \to & I=[1,2]\\
x & \mapsto & f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-2}
\end{array}$$

مثال : املأ الجدولين التاليين :

x	1	$\frac{5}{4}$	2
$f(x)$			

x	2	$\frac{43}{16}$	3
$f^{-1}(x)$			



تعريف : لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال غير فارغ I ؛ ضمن D_f ؛ نعلم أن f تقابل من المجال I نحو المجال $J=f(I)$.
الدالة المعرفة من المجال J نحو المجال I والتي تربط كل عنصر x من J بالعنصر y من I بحيث : $x=f(y)$ ؛ تسمى التقابل العكسي للدالة f ؛ ويرمز لها بالرمز f^{-1} .

قاعدة التحويل :
ليكن f تقابلا من مجال I نحو مجال J ؛ وليكن x عنصرا من J و y عنصرا من I . لدينا :

$$\boxed{y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y)}$$

استنتاج : ليكن f تقابلا من مجال I نحو $J=f(I)$. لدينا :
- ✓ لكل عنصر x من I : $f^{-1}(f(x))=x$.
- ✓ لكل عنصر x من J : $f(f^{-1}(x))=x$.

مثال 2 : لتكن g الدالة المعرفة على المجال $I=[3,4]$ بما يلي : $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$

1- بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده .
2- حدد التقابل العكسي g^{-1} .
3- أنشئ $(\mathcal{C}_g)$ و $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ في نفس المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

طريقة 1 : إعادة للطريقة المستعملة في المثال 1 .
طريقة 2 : استعمال قاعدة التحويل . ليكن $x\in J=[2,3]$ و $y\in I=[3,4]$ بحيث : $y=g^{-1}(x)$.
لدينا :

$$\begin{aligned}
y=g^{-1}(x) &\Leftrightarrow x=g(y)\\
&\Leftrightarrow x=\frac{y}{y-2}\\
&\Leftrightarrow x(y-2)=y\\
&\Leftrightarrow xy-2x=y\\
&\Leftrightarrow y(x-1)=2x\\
&\Leftrightarrow \boxed{y=\frac{2x}{x-1}}
\end{aligned}$$

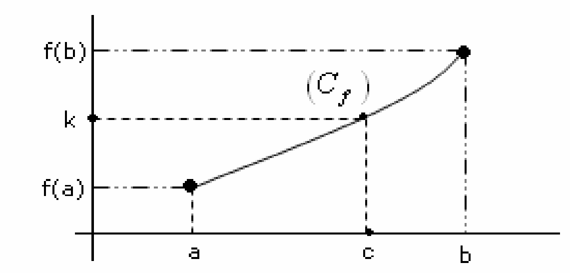
(لأن : $x\in[2,3]\Rightarrow x\neq 1$)

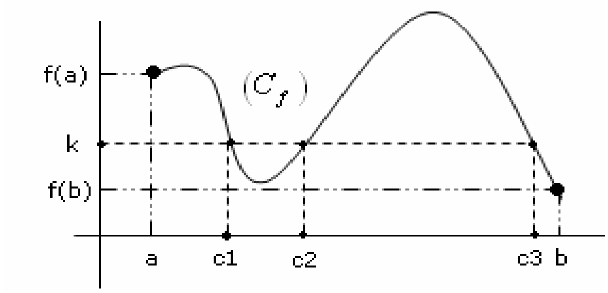
وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned}
g^{-1} :\ J=[2,3] &\to I=[3,4]\\
x &\mapsto g^{-1}(x)=\frac{2x}{x-1}
\end{aligned}$$

خاصية : إذا كانت f **متصلة ورتيبة قطعا** على مجال غير فارغ I $(I\subset D_f)$ ؛ فإن :
- ✓ f تقابل من المجال I نحو المجال $J=f(I)$.
- ✓ f^{-1} متصلة على المجال $J=f(I)$ ؛ ولها نفس رتابة الدالة f .
- ✓ (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

III- مبرهنة القيم الوسطية :





1 – مبرهنة :

> إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ ؛ فإن لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ بحيث: $f(c)=k$.

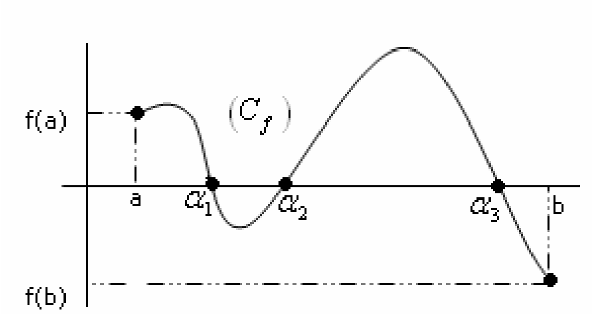
مثال :

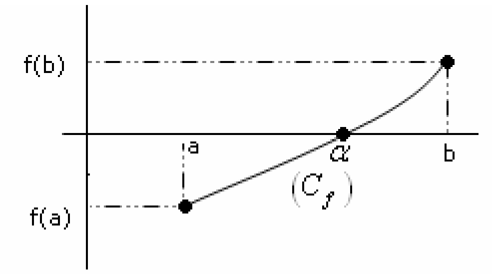
نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

1- أحسب $f(2)$ و $f(3)$.

2- استنتج أن المعادلة : $f(x)=1+\sqrt{2}$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[2,3]$.

2- استنتاج :





إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ فإن 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة القيم الوسطية، يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]a,b[$ بحيث : $f(\alpha)=0$.

نتيجة :

> إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ ؛
> فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a,b[$.

مثال 2 : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-2.\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$.

ملاحظة هامة :

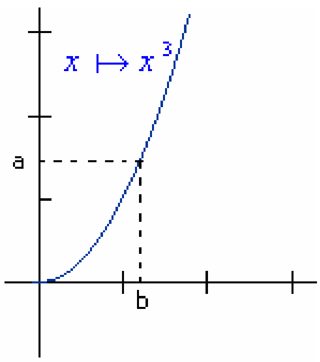
> إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ ؛ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل **حلا وحيدا** في المجال $]a,b[$.

مثال 3 : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3-2$.

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1,2]$.

IV- تطبيقات :

A- دالة الجذر من الرتبة n . $(n\geq 1)$:



مثال تمهيدي : ليكن a من $\mathbb{R}^+$.

نلاحظ أن لكل a من $\mathbb{R}^+$ ؛ يوجد عنصر وحيد b من $\mathbb{R}^+$ بحيث : $b^3=a$.

العدد الحقيقي الموجب b يسمى الجذر من الرتبة 3 للعدد a ويرمز له بالرمز ونكتب $b=\sqrt[3]{a}$. أي : $\boxed{\forall a\in\mathbb{R}^+,\quad \forall b\in\mathbb{R}^+,\quad b^3=a \Leftrightarrow b=\sqrt[3]{a}}$

سؤال : حدد الجذور التالية : $\sqrt[3]{8}$ و $\sqrt[3]{27}$ و $\sqrt[3]{64}$ و $\sqrt[3]{125}$.

✓ الدالة $x\mapsto x^3$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$. إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$. تقابلها العكسي هو الدالة المعرفة بما يلي :

$$\sqrt[3]{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

1.الحالة العامة : ليكن $n \geq 1$.

✓ ليكن $a \in \mathbb{R}^+$. يوجد عنصر وحيد b من $\mathbb{R}^+$ بحيث : $b^n = a$. العدد الحقيقي الموجب b ، يسمى الجذر من الرتبة n للعدد a ويرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ ونكتب : $b = \sqrt[n]{a}$. ولدينا :

✓ **قاعدة التحويل :** $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad \forall b \in \mathbb{R}^+, \quad b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}}$

✓ الدالة $x \mapsto x^n$ متصلة ورتيبة قطعا على المجال $\mathbb{R}^+$ ؛ إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

تقابلها العكسي هو الدالة :
$$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

مثال : بسط الجذور التالية : $\sqrt[4]{16}$ و $\sqrt[6]{64}$ و $\sqrt[3]{512}$.

2. خاصيات أولية :

- i لكل a من $\mathbb{R}^+$ ؛ لدينا : $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.
- ii لكل a من $\mathbb{R}^+$ ؛ لدينا : $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- iii الدالة $\sqrt[n]{\ }$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.
- iv $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty}$.

3. نتائج :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. لدينا :

✓ لكل a من $\mathbb{R}^+$ ولكل b من $\mathbb{R}^+$ ؛ لدينا : $\boxed{\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b}$.

✓ لكل a من $\mathbb{R}^+$ ولكل b من $\mathbb{R}^+$ ؛ لدينا : $\boxed{\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b}$.

تمرين تطبيقي : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$i: \ x^5 = 32$. $\quad iii: \ x^6 = 2$

$ii: \ x^3 = -125$. $\quad iv: \ x^8 = -1$

4. العمليات على الجذور من الرتبة n :

ليكن n و p من $\mathbb{N}^*$ ؛ وليكن a و b من $\mathbb{R}^+$. لدينا :

$i: \ \sqrt[np]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}$.	$iv: \ \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$
$ii: \ \sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$.	$v: \ (b \neq 0): \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
$iii: \ \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.	

تمرين تطبيقي : ليكن a من $\mathbb{R}^+$ ؛ وليكن m و n من $\mathbb{N}^*$. بين أن : $\boxed{\sqrt[m]{a}.\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}}$

مثال : بسط العدد التالي : $A = \dfrac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$.

5. إتصال ونهاية مركبة دالة f ودالة الجذر من الرتبة n :

خاصيات :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح (غير فارغ) I ؛ وليكن x_0 عنصرا من I ؛ وليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

✓ إذا كانت f متصلة وموجبة على I , فإن $\sqrt[n]{f}$ تكون متصلة على I .

✓ إذا كانت f موجبة على I , وكان $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $(l \in \mathbb{R})$ ؛فإن : $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.

✓ إذا كانت f موجبة على I ,وكان $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ؛ فإن : $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

مثال 1 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كالآتي : $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 4}$.

a. حدد D_f ، حيز تعريف الدالة f .

b. بين أن f متصلة في كل نقطة من حيز تعريفها .
c. أحسب نهايتي f عند $+\infty$ و $-\infty$.

مثال 2 : أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$ و $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}{x-2}$.

6. القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا :

i. **تعريف :** ليكن $\boxed{a>0}$ ، وليكن r من $\mathbb{Q}^*$: $\left(r=\frac{p}{q}\quad / \quad p\in\mathbb{Z};\quad q\in\mathbb{N}^*\right)$.

✓ نرمز بالرمز a^r للعدد الحقيقي $\sqrt[q]{a^p}$ ، a^r يسمى **القوة الجذرية** ذات الأساس r للعدد الحقيقي a .
✓ إذا كان $r=0$ ، فإن : $a^r=1$.

ملاحظات :

✓ 0^0 لا معنى له . $0^{\frac{5}{3}}$ لا معنى له .
✓ ليكن p من $\mathbb{Z}$ و $q\in\mathbb{N}^*$. العدد الحقيقي الموجب قطعا $\sqrt[q]{a^p}$ ، يكتب على الشكل $a^{\frac{p}{q}}$ ؛ $\boxed{\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}}$.
✓ ليكن r من $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$. (مثلا : $r=\frac{1}{7}$).

- يكون العدد $f^r(x)$ معرفا إذا وفقط إذا كان $f(x)\in\mathbb{R}$ و $f(x)>0$.
- مثلا : يكون العدد $f^{\frac{1}{7}}(x)$ معرفا إذا وفقط إذا كان $f(x)\in\mathbb{R}$ و $f(x)>0$.

ii. **خاصيات :** ليكن a و b من $\mathbb{R}^{+*}$ وليكن r و r' من $\mathbb{Q}$. لدينا :

$:i$	$a^r.a^{r'}=a^{r+r'}$.	$:iv$	$\left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}$
$:ii$	$\frac{1}{a^r}=a^{-r}$.	$:v$	$a^r.b^r=(a.b)^r$
$:iii$	$\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$.	$:vi$	$\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r$

مثال : أحسب باستعمال هذه الخاصيات العدد : $A=\frac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$.

تمرين تطبيقي : حدد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

$a:$ $f(x)=\sqrt[3]{(x-5)^2}$. $b:$ $f(x)=\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2$. $c:$ $f(x)=(x-5)^{\frac{2}{3}}$

سؤال : بسط العدد التالي : $B=\sqrt[4]{\left(\sqrt{7}-5\right)^4}$.

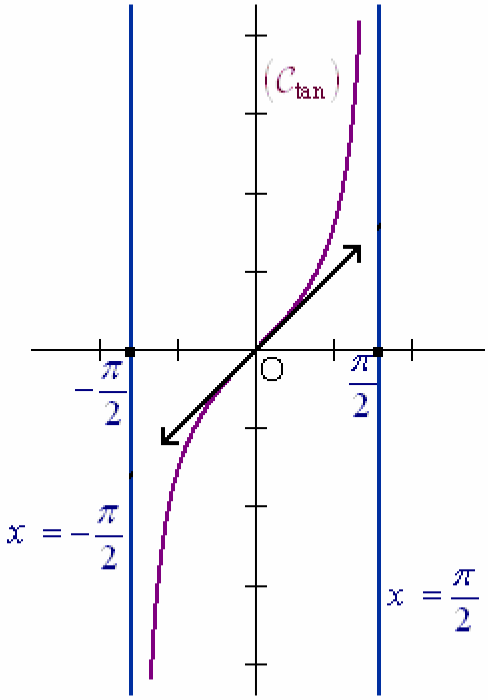
B- دالة قوس الظل Arctan :

لتكن الدالة :
$$f\ :\ \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ \to\ \mathbb{R},\quad x\ \mapsto\ \tan(x)$$

f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. إذن : f تقابل من I نحو المجال $f(I)=\mathbb{R}$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty}\ ;\ \boxed{\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)=-\infty}$$

1. خاصية وتعريف :



لدالة $x \mapsto \tan(x)$ تقابل من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$.

تقابلها العكسي ، يسمى **دالة قوس الظل** ويرمز له بالرمز $Arc\tan$. ولدينا :

$$Arc\tan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad ; \quad x \mapsto Arc\tan(x)$$

2. قاعدة التحويل :

لكل x من $\mathbb{R}$ ، ولكل y من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، لدينا :

$$y = Arc\tan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$$

مثال 1 : أحسب ما يلي : $Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $Arc\tan\left(\sqrt{3}\right)$

مثال 2 : أحسب $\tan\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ ؛ ثم استنتج $Arc\tan(1)$.

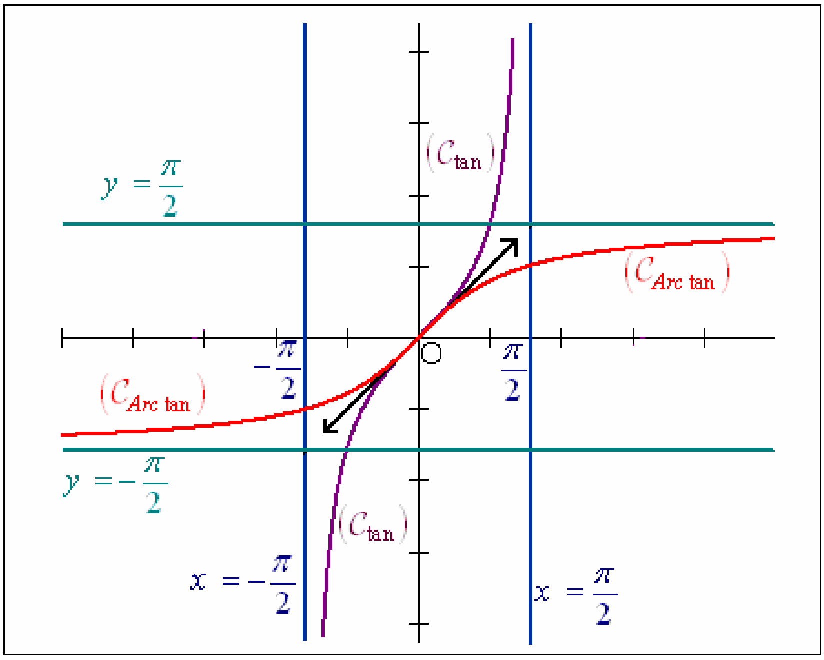
3. نتائج :

a. لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ لدينا : $\boxed{\tan(Arc\tan(x)) = x}$.

b. لكل x من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، لدينا : $\boxed{Arc\tan(\tan(x)) = x}$.

c. الدالة $Arc\tan$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

d. $\boxed{\lim_{x\to+\infty} Arc\tan(x) = \frac{\pi}{2}}$; $\boxed{\lim_{x\to-\infty} Arc\tan(x) = -\frac{\pi}{2}}$.



مثال : أحسب ما يلي : $Arc\tan\left(\tan\left(\frac{2006\pi}{3}\right)\right)$; $A = Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

4. خاصية :

الدالة $Arc\tan$ دالة فردية : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad Arc\tan(-x) = -Arc\tan(x)}$