

تمارين و حلول

تمرين 1

$$1- أ / تأكد أن $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{1}{t(t+2)}$$$

$$ب / أحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}$$$

$$2- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$$

$$3- نضع $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$$$

أحسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J

$$1- أ / تأكد أن $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{1}{t(t+2)}$$$

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{t+2-t}{t(t+2)} = \frac{1}{t(t+2)}$$

$$ب / نحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}$$$

$$\int_1^2 \frac{1}{t(t+2)} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \left[\ln t - \ln(t+2) \right]_1^2 = \ln 2 - \ln 4 + \ln 3 = \ln \frac{3}{2}$$

$$2- نحسب $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$$

$$A = \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \dots\dots\dots$$

$$3- نضع $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$$$

نحسب $I+J$

$$J+I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

نحسب $I-J$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx = \left[x^2 \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$$

$$I - J = \left[x^2 \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-x \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos 2x}{2} dx$$

$$I - J = \frac{-\pi}{4} \quad \text{اذن} \quad I - J = \left[x^2 \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-x \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

نستنتج I و J

$$J = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} \quad \text{و} \quad I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \quad \text{ومنه} \quad I + J = \frac{\pi^3}{24} \quad \text{و} \quad I - J = \frac{-\pi}{4}$$

لدينا

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = e^x(1 - e^x)$

1- حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2- أحسب $f'(x)$ وأعط جدول تغيرات f وأنشئ C_f

3- حدد المساحة A_k المحصور بين C_f و محور الأفصيل و المستقيمين المعرفين

بالمعادلتين $x = 0$; $x = k$ حيث k عدد حقيقي سالب (يمكن اعتبار $t = e^x$)

4- حدد $\lim_{k \rightarrow -\infty} A_k$

$$f(x) = e^x(1 - e^x)$$

4- نحدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(1 - e^x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}(1 - e^x) = -\infty ;$$

5- أنسب $f'(x)$ و نعطي جدول تغيرات f وأنشئ C_f

$$f'(x) = [e^x - e^{2x}]' = e^x - 2e^{2x} = e^x(1 - 2e^x)$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{4}$	$-\infty$

-6 نحدد المساحة A_k

$$A_k = \int_k^0 f(x) dx = \int_k^0 e^x - e^{2x} dx$$

$$A_k = \left[e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_k^0 = \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2} e^{2k}$$

-4 حدد $\lim_{k \rightarrow -\infty} A_k$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2} e^{2k} = \frac{1}{2}$$

