السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية	سلسلة 4

تمرين 1 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \quad ; n \geq 0 \end{cases}$

1) بين أن $\forall n \in IN \quad u_n > 3$

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n)

3) بين أن : $\forall n \in IN \quad u_{n+1} - 3 > \dfrac{9}{5}(u_n - 3)$

4) استنتج أن : $\forall n \in IN \quad u_{n+1} \geq \left(\dfrac{9}{5}\right)^n + 3$

5) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

تمرين 2 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) \quad ; n \geq 0 \end{cases}$

1) بين أن $\forall n \in IN \quad 1 \leq u_n < 4$

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n)

3) بين أن $\forall n \in IN \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \dfrac{2}{3}(4 - u_n)$

4) استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها

تمرين 3 :

I) ادرس رتابة الدالة $f(x) = x - \sin x$ ثم استنتج أن : $\forall x \in IR^+ \ \sin x \leq x$

II) نعتبر المتتالية : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sin u_n \ ; n \geq 0 \end{cases}$

1) بين أن $\forall n \in IN \ \ 0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$

2) بين أن u_n تناقصية

3) بين أن u_n متقاربة ثم احسب نهايتها

تمرين 4 : نعتبر المتتالية : $\begin{cases} u_0 = 1 \, , \, u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \dfrac{3u_{n+1} - u_n}{2} \ ; n \geq 0 \end{cases}$

1) بين أن المتتالية : $v_n = u_{n+1} - u_n$ هندسية

2) أوجد الحد العام للمتتالية v_n ثم u_n

3) حدد نهاية u_n

سلسلة 4	المتتاليات العددية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : $\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n^2-3}{u_n+2} \quad ; n\geq 0 \end{cases}$

1

لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN \quad u_n>3$

▪ بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن: $u_0=4$ و $4>3$

▪ نفترض أن $u_n>3$ و نبين أن $u_{n+1}>3$

لدينا : $u_{n+1}-3=\dfrac{2u_n^2-3}{u_n+2}-3=\dfrac{2u_n^2-3-3u_n-6}{u_n+2}=\dfrac{2u_n^2-3u_n-9}{u_n+2}$

لنعمل الحدودية : $2t^2-3t-9$ ، محددتها هي : $\Delta=3^2-4\times2\times(-9)=9+72=81$

منه : $t_1=\dfrac{3+9}{4}=3$ و $t_1=\dfrac{3-9}{4}=\dfrac{-3}{2}$

منه : $2t^2-3t-9=2(t-t_1)(t-t_2)=2\left(t+\dfrac{3}{2}\right)(t-3)=(2t+3)(t-3)$

منه : $u_{n+1}-3=\dfrac{(2u_n+3)(u_n-3)}{u_n+2}$ و لدينا حسب الافتراض : $u_n>3$ أي $u_n-3>0$

إذن: $u_{n+1}-3>0$ أي $u_{n+1}>3$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن: $\boxed{\forall n\in IN \quad u_n>3}$

2

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n^2-3}{u_n+2}-u_n=\dfrac{2u_n^2-3-u_n^2-2u_n}{u_n+2}=\dfrac{u_n^2-2u_n-3}{u_n+2}$

لنعمل الحدودية : t^2-2t-3 ، محددتها هي : $\Delta=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16$

منه : $t_1=\dfrac{2+4}{2}=3$ و $t_2=\dfrac{2-4}{2}=-1$ منه : $t^2-2t-3=1(t-t_1)(t-t_2)=(t+1)(t-3)$

منه : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n+1)(u_n-3)}{u_n+2}>0$ (لأن : $u_n>3$) بالتالي u_n تزايدية قطعا

3

$$u_{n+1}-3-\frac{9}{5}(u_n-3)=\frac{(2u_n+3)(u_n-3)}{u_n+2}-\frac{9}{5}(u_n-3)=(u_n-3)\left(\frac{2u_n+3}{u_n+2}-\frac{9}{5}\right)$$

$$=(u_n-3)\left(\frac{10u_n+15-9u_n-18}{5(u_n+2)}\right)=(u_n-3)\left(\frac{u_n-3}{5(u_n+2)}\right)=\frac{(u_n-3)^2}{5(u_n+2)}>0$$

4

لدينا : $u_{n+1}-3>\dfrac{9}{5}(u_n-3)$ إذن :

$$\begin{cases} u_1-3\geq\dfrac{9}{5}(u_0-3)>0 \\ u_2-3\geq\dfrac{9}{5}(u_1-3)>0 \\ \quad ...\geq... \\ u_n-3\geq\dfrac{9}{5}(u_{n-1}-3)>0 \end{cases}$$

و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف ثم الاختزال

نجد أن : $u_n-3\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n(u_0-3)$

بالتالي : $u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$

5

لدينا : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{9}{5}\right)^n=+\infty$ (لأن : $\dfrac{9}{5}>1$) إذن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3=+\infty$

بالتالي و حسب مصاديق التقارب فإن $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=+\infty}$ و هذا يعني أن u_n ليست متقاربة.

تمرين 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) \quad ; n \geq 0 \end{cases}$

1

لنبين بالترجع أن $\forall n \in IN \quad 1 \leq u_n < 4$

- بالنسبة لـ $n = 0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0 = 1$ و $1 \leq 1 < 4$
- نفترض أن $1 \leq u_n < 4$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} < 4$

لدينا :

$$1 \leq u_n < 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq u_n < 4 \\ 1 \leq \sqrt{u_n} < 2 \end{cases} \Rightarrow 1+1+2 \leq u_n + \sqrt{u_n} + 2 < 4+2+2$$

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{u_n + \sqrt{u_n} + 2}{2} < 4 \Rightarrow 2 \leq u_{n+1} < 4$$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن: $\boxed{\forall n \in IN \quad 1 \leq u_n < 4}$

2

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2 - 2u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{u_n}\right)^2 + \sqrt{u_n} + 2\right)$$

لنعمل الحدودية : $-t^2 + t + 2$ ، محددتها هي : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$

منه : $t_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1$ و $t_2 = \frac{-1-3}{-2} = 2$ منه :

$$-t^2 + t + 2 = -1(t - t_1)(t - t_2) = -(t+1)(t-2) = (t+1)(2-t)$$

منه : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} + 1\right)\left(2 - \sqrt{u_n}\right) > 0$ (لأن : $\sqrt{u_n} < 2$) بالتالي : u_n تزايدية قطعا

سؤال يتطلب التفكير، لكون من الصعب التعرف على الحدودية انطلاقا من الشكل $-u_n + \sqrt{u_n} + 2$

3

لنبين أن : $\forall n \in IN \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}\left(4 - u_n\right)$

المتفاوتة $0 \leq 4 - u_{n+1}$ سبق إثباتها في السؤال الأول، لدينا :

$$4 - u_{n+1} = 4 - \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(8 - u_n - \sqrt{u_n} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(6 - u_n - \sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{u_n}\right)^2 - \sqrt{u_n} + 6\right)$$

لنعمل الحدودية : $-t^2 - t + 6$ ، محددتها هي : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25$

منه : $t_1 = \frac{1+5}{-2} = -3$ و $t_2 = \frac{1-5}{-2} = 2$ منه : $-t^2 - t + 6 = -1(t - t_1)(t - t_2) = -(t+3)(t-2) = (t+3)(2-t)$

منه :

$$4 - u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} + 3\right)\left(2 - \sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} + 3\right) \times \frac{\left(2 - \sqrt{u_n}\right)\left(2 + \sqrt{u_n}\right)}{2 + \sqrt{u_n}} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\sqrt{u_n} + 3\right)\left(4 - u_n\right)}{2 + \sqrt{u_n}}$$

	إذن : $$(4-u_{n+1})-\frac{2}{3}(4-u_n)=(4-u_n)\left[\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{u_n}+3)}{2+\sqrt{u_n}}-\frac{2}{3}\right]$$ $$=(4-u_n)\left[\frac{3\sqrt{u_n}+9-8-4\sqrt{u_n}}{6(2+\sqrt{u_n})}\right]=(4-u_n)\left[\frac{1-\sqrt{u_n}}{6(2+\sqrt{u_n})}\right]<0$$ (لأن : $1<\sqrt{u_n}$) بالتالي : $\forall n\in IN \quad 0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}(4-u_n)$	
	سؤال أكثر صعوبة لكونه يتطلب زيادة على التعميل استخراج التعبير $4-u_n$ من خلال استعمال المرافق	
4	نعلم أن: $\forall n\in IN \quad 0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}(4-u_n)$ (حسب السؤال السابق) إذن : $$\begin{cases} 0<4-u_1<\frac{2}{3}(4-u_0) \\ 0<4-u_2<\frac{2}{3}(4-u_1) \\ \ldots<\ldots<\ldots \\ \ldots<\ldots<\ldots \\ 0<4-u_n<\frac{2}{3}(4-u_{n-1}) \end{cases}$$ و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف ثم الاختزال نجد أن منه : $0<4-u_n<\left(\frac{2}{3}\right)^n$ منه : $4-\left(\frac{2}{3}\right)^n<u_n<4$ بما أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 4-\left(\frac{2}{3}\right)^n=4-0=4$ (لأن : $-1<\frac{2}{3}<1$) و حسب مصاديق التقارب فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=4}$	
	لاحظ أن فكرة حل السؤال سبق التطرق لها في تمارين سابقة، هذا يعني ضرورة الاستفادة مما سبق.	

تمرين 3 : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\sin u_n \ ; n\geq 0 \end{cases}$

I	لدينا : $\forall x\in IR \quad f'(x)=1-\cos(x)\geq 0$ إذن الدالة : $\forall x\in IR \quad f'(x)\geq 0$ إذن f تزايدية على IR منه: $x\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq f(0) \Rightarrow \sin(x)\geq x$ بالتالي : $\forall x\in IR^+ \quad \sin x\leq x$	
II	1	بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $0<1<\frac{\pi}{2}$ منه : $0<u_0<\frac{\pi}{2}$ نفترض أن $0<u_n<\frac{\pi}{2}$ منه : $0<\sin(u_n)<\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ منه : $0<\frac{1}{2}\sin(u_n)<\frac{1}{2}$ منه $0<u_{n+1}<\frac{\pi}{2}$
		لاحظ أن دالة الجيب تزايدية على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
	2	لدينا حسب I و لكون $u_n>0$ فإن: $\sin(u_n)\leq u_n$ منه $\frac{1}{2}\sin(u_n)\leq\frac{1}{2}u_n\leq u_n$ منه $u_{n+1}\leq u_n$ إذن u_n تناقصية
	3	بما أن u_n تناقصية و مصغورة بالصفر فإنها متقاربة، لتكن ℓ نهايتها. نعتبر الدالة : $g(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$ ، بما أن g متصلة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ و بما أن $g\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0;1]\subset\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

		فإن ℓ هو أحد حلول المعادلة $g(x)=x$ على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ولدينا : $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\ \sin(x)\le x \Rightarrow \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\ g(x)\le\frac{1}{2}x$ إذن : $\begin{cases} g(x)=x \\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le\frac{1}{2}x \\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\le x \\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow x=0$ بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=0}$	
		تمرين 4 : $\begin{cases} u_0=1\ ,\ u_1=2 \\ u_{n+2}=\frac{3u_{n+1}-u_n}{2}\ ;n\ge 0\end{cases}$	
1		لدينا $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3u_{n+1}-u_n}{2}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}-u_n}{2}=\frac{1}{2}v_n$ إذن v_n هندسية	
		أوجد الحد العام للمتتالية $\forall n\in IN\quad v_n=v_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{u_1-u_0}{2^n}=\frac{1}{n}$ ولدينا $\forall n\in IN\ \ u_{n+1}-u_n=v_n$ منه: $\begin{matrix} u_1-u_0=v_0 \\ u_2-u_1=v_1 \\ u_3-u_2=v_2 \\ \dots \\ u_n-u_{n-1}=v_{n-1}\end{matrix}$ منه : $u_n-u_0=v_0+v_1+\dots+v_{n-1}$ منه: $\forall n\in IN\ \ u_n-1=v_0\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ منه : $\forall n\in IN\ \ u_n=3-\frac{1}{2^{n-1}}$	
2		$\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=3}$	