الإتصال

تمرين1

نعتبر الدالة : $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+6}{-2x^2+5x-2}$

1- حدد النهايات عند محدات f

2- ادرس اتصال f على D_f

3- هل الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال في : 2 ; $\frac{1}{2}$ ؟

الحل

1- $D_f=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};2\right[\cup]2;+\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=-1 \qquad \lim_{x\to 2}f(x)=-\frac{1}{3}$$

$$f(x)=\frac{2x-3}{-2x+1} \qquad x\neq 2$$

x	$1/2$
$-2x+1$	$+$ 0 $-$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

تمرين2

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} & x\geq\dfrac{1}{2};x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

بين أن f متصلة في 1 .

الحل

المرافق

تمرين3

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2}{x^3+8} & x<-2 \\ f(-2)=\dfrac{1}{12} \\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+4} & x>-2 \end{cases}$$

بين أن f متصلة في -2

الحل

التعميل

تمرين4

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3}$$

بين أن f تقبل تمديدا بالإتصال في : 3 ثم عرفه

الحل

$$D_f=[2;3[\cup]3;+\infty[$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2x+3}-3\right)-\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)+\left(\sqrt{x-2}-1\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 3}f(x)=\frac{1}{9}}$$

إذن : f تقبل تمديدا بالإتصال في 3

نعتبر: $\begin{cases} g(x)=f(x) & x\in D_f \\ g(3)=\dfrac{1}{9} \end{cases}$

g هي تمديد f بالاتصال في 3

تمرين5

$$n\in\mathbb{N}^*\ ;\ f(x)=\frac{(1+x)^n-1}{x}$$

بين أن f تقبل تمديدا بالإتصال في : 0 ثم عرفه

الحل

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+\cdots+a^1b^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

نعتبر : $a=1+x\ ;\ b=1$

$$(1+x)^n-1=x\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+\cdots+(1+x)+1\right)$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(x+1)^k=n$$

تمرين6

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2}$$

حدد : D_f ؛ $f(D_f)$

الحل

$$f'(x)=\frac{x(x-4)}{x-2}$$

f تناقصية على : $[0;2[\cup]2;4]$

f تزايدية على : $]-\infty;0]\cup[4;+\infty[$

$$f(D_f)=f([0;2[\cup]2;4])\cup f(]-\infty;0]\cup[4;+\infty[)$$

$$f(D_f)=f([0;2[\cup]2;4])\cup f(]-\infty;0]\cup[4;+\infty[)$$

$\boxed{f(D_f) =]-\infty;0] \cup [8;+\infty[}$

تمرين 7

f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$

بحيث : $\forall x \in [a;b] : f(x) > g(x)$

بين أن :

$(\exists \lambda \in \mathbb{R}^{*+})(\forall x \in [a;b]) : f(x) \geq g(x) + \lambda$

الحل

نعتبر : $h(x) = f(x) - g(x) \quad ; \quad x \in [a;b]$

بما أن : f و g دالتان متصلتان على $[a;b]$

فإن : h متصلة على $[a;b]$

$\boxed{\text{إذن : } h \text{ محدودة على } [a;b]}$

ومنه : $(\exists \alpha;\beta \in [a;b]) \,/\, h([a;b]) = [h(\alpha);h(\beta)]$

إذن : $(\forall x \in [a;b]) : h(x) \geq h(\alpha) \quad (1)$

بما أن : $\forall x \in [a;b] : f(x) > g(x)$

فإن : $\forall x \in [a;b] : h(x) > 0$

إذن : $h(\alpha) > 0$

نعتبر: $h(\alpha) = \lambda$ إذن : $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$

من : (1)

$(\exists \lambda \in \mathbb{R}^{*+})(\forall x \in [a;b]) : h(x) \geq \lambda$

إذن : $(\exists \lambda \in \mathbb{R}^{*+})(\forall x \in [a;b]) : f(x) - g(x) \geq \lambda$

و منه : $(\exists \lambda \in \mathbb{R}^{*+})(\forall x \in [a;b]) : f(x) \geq g(x) + \lambda$

تمرين8

-1 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

بين أن $f(x) = 2$ لها حل وحيد على $[2;3]$

-2 $f(x) = 2x^3 - 5$

بين أن $f(x) = 0$ لها حل على $[-1;3]$

الحل

-1 f متصلة تزايدية قطعا على $[2;3]$

و $f([2;3]) = [-1;8]$ و $2 \in [-1;8]$

إذن : $f(x) = 2$ لها حل وحيد على $[2;3]$

-2 f متصلة على $[-1;3]$ و $f(-1) \times f(3) \leq 0$

إذن : حسب مبرهنة القيمة الوسيطية $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $[-1;3]$

تمرين 9

f متصلة على $[a;b]$ بحيث $f(a) < ab$ و $f(b) > b^2$.

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]a;b[$ بحيث $f(c) = bc$

الحل

نعتبر : $g(x) = f(x) - bx$ بحيث $x \in [a;b]$ أ-

بما أن f متصلة على $[a;b]$

فإن g متصلة على $[a;b]$ أ

لدينا : $g(a) = f(a) - ab$ و $f(a) < ab$

إذن : $g(a) < 0$

لدينا : $g(b) = f(b) - b^2$ و $f(b) > b^2$

إذن : $g(b) > 0$

و منه : $g(a)g(b) < 0$ ب

و من أ و ب : و حسب مبرهنة القيمة الوسيطية المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $[a;b]$

إذن : يوجد عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث $g(c) = 0$

يعني : : يوجد عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث $f(c) = bc$

تمرين10

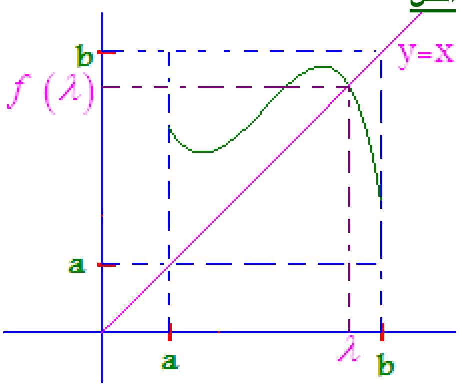
f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ بحيث :

$f([a;b]) \subset [a;b]$

بين أن : $\exists \lambda \in [a;b] \,/\, f(\lambda) = \lambda$

(قبل البرهنة ارسم شكلا موضحا ذلك)

الحل



إذا كان : $f(a) = a$ أو $f(b) = b$ فالمطلوب تحقق

نفترض أن : $f(a) \neq a$ و $f(b) \neq b$

بما أن : $f([a;b]) \subset [a;b]$

فإن : $a < f(a)$ و $f(b) < b$

نعتبر : $g(x) = f(x) - x$ بحيث $x \in [a;b]$

بما أن : f دالة متصلة على $[a;b]$

فإن : g دالة متصلة على $[a;b]$

$g(a) > 0$ و $g(b) < 0$

حسب مبرهنة القيمة الوسيطية $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا على $[a;b]$

إذن : $\exists \lambda \in [a;b] \ / \ f(\lambda)=\lambda$

تمرين11 (التمرين 84 ص 43 المفيد في الرياضيات)

f دالة عددية متصلة من $\mathbb{R}$ نحو : $]-\infty;1[$

$0<a<b$

g دالة عددية متصلة على $\mathbb{R}$:

بحيث : $f(a)=a \ ; \ g(b)=b$ ؛ $(\forall x \in \mathbb{R}) \ g(x)>1$

بين أن : $\exists x_0 \in]a;b[\ / \ g(x_0)f(x_0)=x_0$

الحل

$f(a) \in]-\infty;1[$ إذن : $f(a)<1$

و $g(a)>1$ لأن $(\forall x \in \mathbb{R}) \ g(x)>1$

نعتبر : $h(x)=f(x)g(x)-x$

$h(a)=a(g(a)-1)$ إذن : $h(a)>0$

$h(b)=b(f(a)-1)$ إذن : $h(b)<0$

حسب مبرهنة القيمة الوسيطية $h(x)=0$ تقبل على الأقل حلا على $[a;b]$

إذن : $\exists x_0 \in]a;b[\ / \ g(x_0)f(x_0)=x_0$

تمرين12

احسب :

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{36x^2+x}+6x$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+1}$

3- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x+5}}{\sqrt{x+4}-2}$

4- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

5- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x$

6- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1}-x$

الحل

1- بما أن x تؤول إلى $-\infty$ نعتبر :

$x<0$ إذن : $\sqrt{x^2}=|x|=-x$

$$A=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{36x^2+x}+6x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{36x^2+x-36x^2}{\sqrt{36x^2+x}-6x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{36x^2+x}-6x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\left(\sqrt{36+\frac{1}{x}}+6\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\left(\sqrt{36+\frac{1}{x}}+6\right)}$$

$$=-\frac{1}{12}$$

إذن :
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{36x^2+x}+6x=-\frac{1}{12}}$$

-2 $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+1}$ نفس طريقة 1

-3
$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x+5}}{\sqrt{x+4}-2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+5-3x-5)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{(x+4-2)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+5}\right)}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{(x+2)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+5}\right)}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+5}\right)}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+5}\right)}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\sqrt{4}+2\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)}$$

$$A=-\frac{4}{\sqrt{5}}$$

إذن :
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x+5}}{\sqrt{x+4}-2}=-\frac{4}{\sqrt{5}}}$$

4- المرافق ثم التعميل ب $x-2$ أو وضع $t=x-2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\frac{3}{8}$$

-5

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}}-1\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x=-\infty}$$

-6 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x=+\infty$ مباشرة

تمرين13

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1 - بين أن : $f(\mathbb{R})\subset]-1;1[$

2 - احسب : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

3 - استنتج : $f(\mathbb{R})$

الحل

-1 $\forall x\in\mathbb{R}$

$$x^2<x^2+1\Leftrightarrow|x|<\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|<1$$

إذن : $|f(x)|<1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

و منه : $f(\mathbb{R})\subset]-1;1[$

2 - $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$

3 – f متصلة و $\mathbb{R}$ مفتوح

إذن : $f(\mathbb{R})$ مفتوح

بما أن : f فردية و $|f(x)|<1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

فإن : $\exists\alpha\in]0;1]$ بحيث : $f(\mathbb{R})=]-\alpha;\alpha[$

إذن : $f(x)<\alpha \quad \forall x\in\mathbb{R}$

و منه : $\lim_{x\to+\infty}f(x)\le\alpha$ إذن : $1\le\alpha$

إذن : $\alpha=1$

و منه : $\boxed{f(\mathbb{R})=]-1;1[}$

تمرين14

$$n\in\mathbb{N}^*-\{1\};\ f(x)=x^{n+1}-3x^n+2$$

1- أ- بين أن : f تناقصية على $\left[0;\frac{3n}{n+1}\right]$

ب- استنتج أن : $f\left(\frac{3n}{n+1}\right)<0$

2- بين أن : $\exists\alpha\in\left[\frac{3n}{n+1};3\right]/f(\alpha)=0$

الحل

-1

أ- $n\in\mathbb{N}^*-\{1\};\ f(x)=x^{n+1}-3x^n+2$

$$f(x)=x^{n-1}\left((n+1)x-3n\right)$$

إذن : f تناقصية على $\left[0;\frac{3n}{n+1}\right]$

ب- لدينا : $1\in\left[0;\frac{3n}{n+1}\right]$ لأن $n>1$

و بما أن : f تناقصية قطعا على $\left[0;\frac{3n}{n+1}\right]$

فإن : $f\left(\frac{3n}{n+1}\right)<f(1)$

و لدينا : $f(1)=0$

إذن : $f\left(\frac{3n}{n+1}\right)<0$

-2 لدينا : $f(3)>0$ و $f\left(\frac{3n}{n+1}\right)<0$

حسب مبرهنة القيمة الوسيطية $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا على $\left[\frac{3n}{n+1};3\right]$

إذن : $\exists\alpha\in\left[\frac{3n}{n+1};3\right]/f(\alpha)=0$