السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية	سلسلة 3

تمرين 1 : بين أن كل متتاليتين مما يلي متحاذيتان:

1) $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

2) $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

تمرين 2 : نعتبر المتتاليتين : $\begin{cases} u_0 = a \; ; \; v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ حيث $b > a > 0$

1) بين أن : $0 < u_n \le v_n \quad \forall n \in IN$

2) أدرس رتابة u_n و v_n

3) أثبت أن : $0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n) \quad \forall n \in IN$

4) بين أن : $0 \le v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(b-a) \quad \forall n \in IN$

5) أثبت أن u_n و v_n متقاربتان

6) نضع : $w_n = u_n \, v_n$

أ) أدرس رتابة w_n

ب) حدد نهاية كل من u_n و v_n

تمرين 3 : نعتبر المتتاليتين : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

1) بين أن u_n و v_n متقاربتان

2) نضع $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$ و نفترض أن ℓ عدد جذري أي $\ell = \frac{p}{q}$ حيث $(p,q) \in IN \times IN^*$

أ) بين أن : $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{q\,q!}$

ب) بين أن $\frac{p}{q} - u_q$ كسر مقامه $q!$

3) استنتج أن $\ell \notin Q$ (العدد ℓ نرمز له بـ e ويسمى الأساس النبيري)

Moutamadris.ma

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 :

1

$u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n+\frac{1}{n}$

لدينا : $v_n-u_n=\frac{1}{n}$ منه $v_n>u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

و : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$ إذن u_n تزايدية قطعا

ولدينا :

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{n+1}-u_n-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{-1}{n(n+1)}=\frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}<0$$

إذن v_n تناقصية قطعا، بالتالي u_n و v_n متحاذيتان.

2

$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ و $v_n=u_n+\frac{1}{n\,n!}$

لدينا : $v_n-u_n=\frac{1}{n\,n!}>0$ منه : $v_n>u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ (لأن $0<\frac{1}{n\,n!}\leq\frac{1}{n}$)

و : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$ إذن u_n تزايدية قطعا

ولدينا :

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-u_n-\frac{1}{n\,n!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n\,n!}$$

$$=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}=\frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}<0$$

إذن v_n تناقصية قطعا، بالتالي u_n و v_n متحاذيتان.

تمرين 2 : $\begin{cases} u_0=a\ ;\ v_0=b \\ u_{n+1}=\frac{2u_n\,v_n}{u_n+v_n}\quad ,\quad v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$ حيث $b>a>0$

1

بالنسبة لـ : $n=0$: $0<u_0\leq v_0$ لأن : $b>a>0$

نفترض أن : $0<u_n\leq v_n$ منه : $u_{n+1}=\frac{2u_n\,v_n}{u_n+v_n}>0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}-\frac{2u_n\,v_n}{u_n+v_n}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}\geq 0$

إذن: $0<u_{n+1}\leq v_{n+1}$

2

لدينا : $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+v_n}{2}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}\leq 0$ إذن v_n تناقصية

لدينا u_n $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}-u_n=\frac{u_nv_n-u_n^2}{u_n+v_n}=\frac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n}>0$ إذن u_n تزايدية

3

لدينا و $0<v_{n+1}-u_{n+1}$ $\forall n\in IN$ و $\frac{v_{n+1}-u_{n+1}}{v_n-u_n}=\frac{u_n-v_n}{2(u_n+v_n)}<\frac{1}{2}$ $\forall n\in IN$

بالتالي $0\leq v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(v_n-u_n)$ $\forall n\in IN$

(سبق و حسبنا الفرق $v_{n+1}-u_{n+1}$ و أيضا $\frac{u_n-v_n}{u_n+v_n}<1$ لأن البسط أصغر من المقام)

Moutamadris.ma

4		لدينا : $0\le v_1-u_1\le \frac{1}{2}\left(v_0-u_0\right)$ و $0\le v_2-u_2\le \frac{1}{2}\left(v_1-u_1\right)$ و . . . و $0\le v_n-u_n\le \frac{1}{2}\left(v_{n-1}-u_{n-1}\right)$ بضرب المتفاوتات و الاختزال نجد : $0\le v_n-u_n\le \frac{1}{2^n}\left(v_0-u_0\right)$ أي $0\le v_n-u_n\le \frac{1}{2^n}(b-a)$
5		لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left(v_n-u_n\right)=0$ (لأن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}(b-a)=0$) و v_n تناقصية و u_n تزايدية ، إذن u_n و v_n متقاربتان
6	أ	لدينا : $w_n=u_n\,v_n=u_{n+1}\,v_{n+1}=w_{n+1}$ إذن w_n متتالية ثابتة
	ب	لدينا w_n متتالية ثابتة إذن : $\forall n\in IN\ \ w_n=w_0=ab$ ، منه : $\forall n\in IN\ \ u_n\,v_n=ab$ بما أن u_n و v_n متقاربتان نضع : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=\ell$ من $\forall n\in IN\ \ u_n\,v_n=ab$ نستنتج أن : $\ell^2=ab$ منه : $\ell=\sqrt{ab}$ أو $\ell=-\sqrt{ab}$ و لكون : $0<u_n$ فإن : $\ell\ge 0$ بالتالي : $\ell=\sqrt{ab}$
تمرين 3 :		$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$ و $v_n=u_n+\frac{1}{n\,n!}$
1		أنظر السؤال الثاني من التمرين الأول
2	أ	نضع $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=\ell$ و نفترض أن ℓ عدد جذري أي $\ell=\frac{p}{q}$ حيث $(p,q)\in IN\times IN^*$ لدينا u_n و v_n متحاذيتان نهايتهما ℓ إذن: $\forall n\in IN^*\ \ u_n<\ell<v_n$ منه : $u_q<\ell<v_q$ منه $u_q<\frac{p}{q}<u_q+\frac{1}{q\,q!}$ منه : $0<\frac{p}{q}-u_q<\frac{1}{q\,q!}$
	ب	لدينا : $\frac{p}{q}-u_q=\frac{p}{q}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{q!}\right)=\frac{p\left(q-1\right)!-q!-q!-\frac{q!}{2}-\frac{q!}{3}-\dots-\frac{q!}{q}}{q!}$ و بما أن $\forall k\in\{1\dots q\}\ \ \frac{q!}{k}\in IN$ فإن : كسر مقامه $q!$ و بسطه عدد صحيح نسبي
3		لدينا: $\frac{p}{q}-u_q=\frac{a}{q!}\ /a\in Z$ و $0<\frac{p}{q}-u_q<\frac{1}{q\,q!}$: منه $0<\frac{a}{q!}<\frac{1}{q\,q!}$: منه $0<q\,a<1$ وهذا غير ممكن لأنه لا يوجد عدد صحيح نسبي محصور بين 0 و 1 بالتالي أن $\ell\notin Q$

Moutamadris.ma