

تمرين 1 :

$$\begin{cases} A = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{2f}{5}\right) + \cos\left(\frac{3f}{5}\right) + \cos\left(\frac{4f}{5}\right) \\ B = \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right) + \sin\left(\frac{3f}{5}\right) + \sin\left(\frac{4f}{5}\right) \end{cases}$$

نضع $w = \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right)$ ، نعتبر المجموعين :

1) احسب A

2) بين أن $A + iB = \frac{1-w^5}{1-w}$ ثم استنتج أن : $iB = \frac{1+w}{1-w}$ 3) اكتب على الشكل المثلثي كلا من $1+w$ و $1-w$

4) استنتج حساب B

5) احسب : $C = \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right)$ **تمرين 2 :** نضع $w = \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right)$ 1) بين أن : $w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = 0$ 2) نضع $z = w + \frac{1}{w}$ أ) تحقق أن : $z^2 - z - 1 = 0$ ثم استنتج القيم الممكنة للعدد zب) تحقق أن : $w + \frac{1}{w} = 2 \cos\left(\frac{f}{5}\right)$ 3) حدد النسب المثلثية للزاوية $\frac{f}{5}$ **تمرين 3 :** المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، ليكن $(n, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ نعتبر الأعداد : $z_k = \left[1; \frac{r}{n} + \frac{2kf}{n}\right] / k \in \{1; 2; \dots; n\}$ ، ونعتبر في المستوى العقدي النقط M_1 و M_2 و ... و M_n ذات الألقاق على التوالي : $(z_1 + 1)^n$ و $(z_2 + 1)^n$ و ... و $(z_n + 1)^n$ ▪ بين أن النقط M_1 و M_2 و ... و M_n مستقيمية**تمرين 4 :** نعتبر العدد : $Z = \cos \theta + i \sin \theta$ حيث $\theta \in]-f; f]$ اكتب على الشكل المثلثي العدد $1 + Z + Z^2$

سلسلة 3	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
	$\begin{cases} A = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{2f}{5}\right) + \cos\left(\frac{3f}{5}\right) + \cos\left(\frac{4f}{5}\right) \\ B = \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right) + \sin\left(\frac{3f}{5}\right) + \sin\left(\frac{4f}{5}\right) \end{cases}$	تمرين 1 : $w = \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right)$
	$A = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{2f}{5}\right) + \cos\left(\frac{3f}{5}\right) + \cos\left(\frac{4f}{5}\right)$ $A = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{2f}{5}\right) + \cos\left(f - \frac{2f}{5}\right) + \cos\left(f - \frac{f}{5}\right)$ $A = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{2f}{5}\right) - \cos\left(\frac{f}{5}\right) - \cos\left(\frac{2f}{5}\right)$ $A = 1$	1
	$A + iB = 1 + \left[\cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right) \right] + \left[\cos\left(\frac{2f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2f}{5}\right) \right] + \left[\cos\left(\frac{3f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{3f}{5}\right) \right] + \left[\cos\left(\frac{4f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4f}{5}\right) \right]$ $A + iB = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \frac{1 - w^5}{1 - w}$ $iB = \frac{2}{1 - w} - A = \frac{2}{1 - w} - 1 = \frac{1 + w}{1 - w} \quad \text{بما أن } w^5 = \cos(f) + i \sin(f) = -1 \text{ فإن } A + iB = \frac{2}{1 - w} \text{ منه } A + iB = \frac{2}{1 - w}$	2
	$1 - w = 1 - \cos\left(\frac{f}{5}\right) - i \sin\left(\frac{f}{5}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{f}{10}\right) - 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \cos\left(\frac{f}{10}\right) i = 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \left(\sin\left(\frac{f}{10}\right) - \cos\left(\frac{f}{10}\right) i \right)$ $1 - w = 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \left(\cos\left(\frac{f}{2} - \frac{f}{10}\right) - \sin\left(\frac{f}{2} - \frac{f}{10}\right) i \right) = 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \left(\cos\left(\frac{2f}{5}\right) - \sin\left(\frac{2f}{5}\right) i \right)$ $1 - w = \left[2 \sin\left(\frac{f}{10}\right); \frac{-2f}{5} \right]$ $1 + w = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{f}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \cos\left(\frac{f}{10}\right) i = 2 \cos\left(\frac{f}{10}\right) \left(\cos\left(\frac{f}{10}\right) + \sin\left(\frac{f}{10}\right) i \right)$ $1 + w = \left[2 \cos\left(\frac{f}{10}\right); \frac{f}{10} \right]$	3
	$iB = \frac{\left[2 \cos\left(\frac{f}{10}\right); \frac{f}{10} \right]}{\left[2 \sin\left(\frac{f}{10}\right); \frac{-2f}{5} \right]} = \frac{\left[2 \cos\left(\frac{f}{10}\right); \frac{f}{10} + \frac{2f}{5} \right]}{\left[2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \right]} = \left[\cotan\left(\frac{f}{10}\right); \frac{f}{2} \right] = i \cotan\left(\frac{f}{10}\right)$ $B = \cotan\left(\frac{f}{10}\right) \quad \text{بالتالي}$	4
	للتذكير، $\cotan(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$ (ليس من الضروري استعماله، لكنه يجعل الصيغة أكثر بساطة)	

$$C = \frac{B}{2} = \frac{\cotan\left(\frac{f}{10}\right)}{2} \quad \text{بالتالي} :$$

$$B = \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right) + \sin\left(\frac{3f}{5}\right) + \sin\left(\frac{4f}{5}\right)$$

$$B = \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right) + \sin\left(f - \frac{2f}{5}\right) + \sin\left(f - \frac{f}{5}\right) \quad \text{لدينا} : 5$$

$$B = \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right) + \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right)$$

$$B = 2C$$

$$w = \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right) \quad \text{تمرين 2} :$$

$$w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = \frac{w^4 + 1 - w^3 - w + w^2}{w^2} = \frac{1 + (-w) + (-w)^2 + (-w)^3 + (-w)^4}{w^2} \quad \text{لدينا} :$$

$$w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = \frac{1}{w^2} \times \frac{1 - (-w)^5}{1 - (-w)} = \frac{1}{w^2} \times \frac{1 + w^5}{1 + w}$$

$$w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = 0 \quad \text{فإن } w^5 = \cos(f) + i \sin(f) = -1 \quad \text{وبما أن } 1$$

$$z^2 - z - 1 = \left(w + \frac{1}{w}\right)^2 - \left(w + \frac{1}{w}\right) - 1 = w^2 + 2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) - 1 = w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = 0 \quad \text{لدينا } z = w + \frac{1}{w} \text{ منه} :$$

$$z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{منه} : \Delta = 1 + 4 = 5, \quad z^2 - z - 1 = 0 \quad \text{إذن } z \text{ هو حل للمعادلة} : 2$$

$$w + \frac{1}{w} = w + w^{-1} = \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{-f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{-f}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{f}{5}\right) \quad \text{لدينا} : \text{ب)}$$

$$2 \cos\left(\frac{f}{5}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{أو} \quad 2 \cos\left(\frac{f}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{لكن وبما أن } \cos\left(\frac{f}{5}\right) > 0 \quad \text{(لأن } 0 < \frac{f}{5} < \frac{f}{2} \text{)} \quad \text{فإن} : \text{بالتالي} : \cos\left(\frac{f}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{f}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{f}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16 - 1 - 2\sqrt{5} - 5}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{2(5 - \sqrt{5})}}{4} \quad \text{منه} : 3$$

$$\tan\left(\frac{f}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{f}{5}\right)}{\cos\left(\frac{f}{5}\right)} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \quad \text{ومنه} :$$

$$\sin\left(\frac{f}{5}\right) > 0 \quad \text{لأن} \quad \sin\left(\frac{f}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{f}{5}\right)}$$

تجاوزت بعض حسابات الجذور المربعة

تمرين 3: المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، ليكن $(n, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$

لدينا لكل $k \in \{1; 2; \dots; n\}$

$$z_k + 1 = 1 + \cos\left(\frac{r}{n} + \frac{2kf}{n}\right) + i \sin\left(\frac{r}{n} + \frac{2kf}{n}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) + 2 \sin\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) \sin\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) i$$

$$z_k + 1 = 2 \cos\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) \left(\cos\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) + \sin\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) i \right)$$

$$(z_k + 1)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) \left(\cos\left(\frac{r}{2} + kf\right) + \sin\left(\frac{r}{2} + kf\right) i \right) : \text{منه}$$

طريقة 1

▪ إذا كان: $\cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) > 0$ فإن: $\arg((z_k + 1)^n) \equiv 0 + \frac{r}{2} + kf [2f] \equiv \frac{r}{2} [f]$

▪ إذا كان: $\cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) < 0$ فإن: $\arg((z_k + 1)^n) \equiv f + \frac{r}{2} + kf [2f] \equiv \frac{r}{2} [f]$

▪ إذا كان: $\cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) = 0$ فإن: $(z_k + 1)^n = 0$

في كل الحالات نجد أن M_k إما تنطبق مع O أو تنتمي للمستقيم المار من O والذي يكون الزاوية $\frac{r}{2}$ مع

(O, \vec{e}_1) ، بالتالي النقط M_1 و M_2 و ... و M_n مستقيمة

طريقة 2: لدينا لكل $p, q \in \{1; 2; \dots; n\}$

$$\frac{(z_p + 1)^n}{(z_q + 1)^n} = \frac{2^n \cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{pf}{n}\right) \left(\cos\left(\frac{r}{2} + pf\right) + \sin\left(\frac{r}{2} + pf\right) i \right)}{2^n \cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{qf}{n}\right) \left(\cos\left(\frac{r}{2} + qf\right) + \sin\left(\frac{r}{2} + qf\right) i \right)} = \frac{\cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{pf}{n}\right)}{\cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{qf}{n}\right)} [1; (p-q)f] \in \mathbb{R}$$

إذن لكل $p, q \in \{1; 2; \dots; n\}$ و M_p و M_q مستقيمة مع O ، بالتالي النقط M_1 و M_2 و ... و M_n مستقيمة

🌟 للتذكير $\forall r \in \mathbb{R}^* \forall k \in \mathbb{Z} [r; kf] \in \mathbb{R}$

تمرين 4: نعتبر العدد: $Z = \cos_n + i \sin_n$ حيث ${}_n \in]-f; f[$

لدينا $|Z| = 1$ منه: $Z \bar{Z} = 1$ منه: $1 + Z + Z^2 = Z \bar{Z} + Z + Z^2 = Z(\bar{Z} + 1 + Z) = (1 + Z + \bar{Z})Z = (1 + 2 \cos_n)Z$

▪ إذا كان: $\cos_n = \frac{-1}{2}$ فإن: $1 + Z + Z^2 = 0$ (لا يمكن كتابته على الشكل المثلثي)

▪ إذا كان: $\cos_n > \frac{-1}{2}$ فإن: $1 + Z + Z^2 = [1 + 2 \cos_n; {}_n]$

▪ إذا كان: $\cos_n < \frac{-1}{2}$ فإن: $1 + Z + Z^2 = [-(1 + 2 \cos_n); {}_n + f]$

🌟 الشكل المثلثي $r(\cos_n + i \sin_n)$ يستوجب أن يكون $r > 0$ ، فإذا كان سالبا يكون لدينا:

$$r(\cos_n + i \sin_n) = (-r) \times (-1) \times [1; {}_n] = [-r; 0] \times [1; f] \times [1; {}_n] = [-r; {}_n + f]$$

🌟 الشكل الأسّي لا يستوجب الشرط السابق