

السلسلة 2	الأعداد العقدية	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية
<p>تمرين 1: اكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي .</p> $z_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i \quad , \quad z_3 = -\sqrt{3} - i \quad , \quad z_2 = 1 - i \quad , \quad z_1 = 3 + 3i$ $z_9 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}i \quad , \quad z_8 = \frac{-i}{4} \quad , \quad z_7 = 11i \quad , \quad z_6 = -7 \quad , \quad z_5 = 13$ $z_{13} = 1 - \cos(2s) + i \sin(2s) \quad , \quad z_{12} = \sin(r) + i \cos(r) \quad , \quad z_{11} = -\cos(r) - i \sin(r) \quad , \quad z_{10} = \cos(r) - i \sin(r)$ <p>حيث $r \in [-f, f[$ و $s \in \left] 0, \frac{f}{2} \right[$</p>		
<p>تمرين 2:</p> <p>1) حدد معيار وعمدة العددين العقديين التاليين : $v = 1 - i$ ، $u = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$</p> <p>2) اكتب على الشكل المثلثي :</p> $z_7 = -iv \quad , \quad z_6 = 5u \quad , \quad z_5 = \frac{v^2}{u^3} \quad , \quad z_4 = \frac{1}{v^7} \quad , \quad z_3 = u^5 \quad , \quad z_2 = \frac{u}{v} \quad , \quad z_1 = uv$		
<p>تمرين 3: المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. نعتبر النقط $A(1+3i)$ و $B\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i\right)$ و $C(1+2i)$</p> <p>1) أكتب على الشكل المثلثي العدد : $\frac{c-a}{b-a}$</p> <p>2) استنتج حساب القياس الجبري للزاوية $(\overline{AB}, \overline{AC})$ و استنتج أن : $AB = AC$</p> <p>3) استنتج طبيعة المثلث ABC.</p>		
<p>تمرين 4: نعتبر الأعداد العقدية التالية : $w = \frac{u}{v}$ و $v = 1 + i$ و $u = 1 + i\sqrt{3}$</p> <p>1) أكتب على الشكل الجبري العدد w</p> <p>2) اكتب على الشكل المثلثي العددين u و v و استنتج الكتابة المثلثية للعدد w</p> <p>3) استنتج مما سبق حساب $\sin\left(\frac{f}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{f}{12}\right)$ و $\tan\left(\frac{f}{12}\right)$</p>		
<p>تمرين 5: نعتبر العدد العقدي $Z = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$</p> <p>1) تحقق أن : $Z^2 = 8\sqrt{3} + 8i$</p> <p>2) أكتب على الشكل المثلثي العدد : Z^2</p> <p>3) استنتج عمدة و معيار Z</p> <p>4) احسب $\sin\left(\frac{f}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{f}{12}\right)$ و $\tan\left(\frac{f}{12}\right)$</p>		

رياضيات النجاح أذ سمير لخريسي

تمرين 1: اكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي .

$$z_1 = 3 + 3i = 3(1 + i) = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{f}{4}\right) + i \sin\left(\frac{f}{4}\right) \right) = \left[3\sqrt{2}; \frac{f}{4} \right]$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{f}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{f}{4}\right) \right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{f}{4} \right]$$

$$z_3 = -\sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{7f}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7f}{6}\right) \right) = \left[2; \frac{7f}{6} \right]$$

$$z_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{2f}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2f}{3}\right) \right) = \left[2\sqrt{2}; \frac{f}{3} \right]$$

$$z_5 = 13 = 13 \times 1 = (\cos(0) + i \sin(0)) = [13; 0]$$

$$z_6 = -7 = 7 \times (-1) = (\cos(f) + i \sin(f)) = [7; f]$$

$$z_7 = 11i = 11 \times i = \left(\cos\left(\frac{f}{2}\right) + i \sin\left(\frac{f}{2}\right) \right) = \left[11; \frac{f}{2} \right]$$

$$z_8 = \frac{-i}{4} = \frac{1}{4} \times (-i) = \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{-f}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-f}{2}\right) \right) = \left[\frac{1}{4}; \frac{-f}{2} \right]$$

$$z_9 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}i = \frac{1}{7}(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{7} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{7}; \frac{f}{4} \right]$$

$$z_{10} = \cos(r) - i \sin(r) = \cos(-r) + i \sin(-r) = [1; -r]$$

$$z_{11} = -\cos(r) - i \sin(r) = \cos(r + f) + i \sin(r + f) = [1; r + f]$$

$$z_{12} = \sin(r) + i \cos(r) = \cos\left(\frac{f}{2} - r\right) + i \sin\left(\frac{f}{2} - r\right) = \left[1; \frac{f}{2} - r \right]$$

$$z_{13} = 1 - \cos(2s) + i \sin(2s) = 2 \sin^2(s) + 2 \sin(s) \cos(s) i = 2 \sin(s) (\sin(s) + i \cos(s))$$

$$z_{13} = 2 \sin(s) \left(\cos\left(\frac{f}{2} - s\right) + i \sin\left(\frac{f}{2} - s\right) \right) = \left[2 \sin(s); \frac{f}{2} - s \right]$$

$$(s \in]0, \frac{f}{2}[\Rightarrow 2 \sin(s) > 0 \text{ : لأن})$$

🌟 للتذكير، للحصول على الشكل المثلثي للعدد: $z = a + ib$ نعمل بمعيار العدد z أي نكتب: $z = r \left(\frac{a}{r} + i \frac{b}{r} \right)$

حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ثم نبحت في جدول القيم الهامة عن الزاوية r التي تحقق: $\cos(r) = \frac{a}{r}$ و $\sin(r) = \frac{b}{r}$

🌟 ليس من الضروري اتباع الطريقة السابقة في كل الحالات، فمثلا إن تبين لنا عامل مشترك نعمل به أولا ثم نطبق الطريقة على العامل المحصل عليه (مثل z_1 و z_5)

🌟 حالات خاصة: $\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad a = [a, 0]; -a = [a, f]; ai = \left[a, \frac{f}{2} \right]; -ai = \left[a, -\frac{f}{2} \right]$

🌟 يمكن استعمال خاصيات الكتابة المثلثية أحيانا لتحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي، مثلا:

$$z_3 = -\sqrt{3} - i = -(\sqrt{3} + i) = -2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = [-2; f] \times \left[1; \frac{f}{6} \right] = [-2; f] \times \left[2 \times 1; f + \frac{f}{6} \right] = \left[2; \frac{5f}{6} \right]$$

تمرين 2 :

$$u = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2}) = \frac{1}{2}2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left[\sqrt{2}; \frac{f}{6}\right]$$

$$v = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left[\sqrt{2}; \frac{-f}{4}\right]$$

1

$$z_1 = uv = \left[\sqrt{2} \times \sqrt{2}; \frac{f}{6} + \left(\frac{-f}{4}\right)\right] = \left[2; \frac{-f}{12}\right]$$

$$z_2 = \frac{u}{v} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{f}{6} - \left(\frac{-f}{4}\right)\right] = \left[1; \frac{5f}{12}\right]$$

$$z_3 = u^5 = \left[\sqrt{2}^5; 5 \times \frac{f}{6}\right] = \left[4\sqrt{2}; \frac{5f}{6}\right]$$

$$z_4 = \frac{1}{v^7} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}^7}; -7 \times \frac{-f}{4}\right] = \left[\frac{1}{8\sqrt{2}}; \frac{7f}{4}\right]$$

2

$$z_5 = \frac{v^2}{u^3} = \left[\frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}^3}; 2 \times \left(\frac{-f}{4}\right) - 3 \times \frac{f}{6}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; -f\right]$$

$$z_6 = 5u = [5; 0] \times \left[\sqrt{2}; \frac{f}{6}\right] = \left[5\sqrt{2}; \frac{f}{6}\right]$$

$$z_7 = -iv = \left[1; \frac{-f}{2}\right] \times \left[\sqrt{2}; \frac{-f}{4}\right] = \left[1 \times \sqrt{2}; \frac{-f}{2} + \frac{-f}{4}\right] = \left[\sqrt{2}; \frac{-3f}{4}\right]$$

تمرين 3 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. $A(1+3i)$ ، $B\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i\right)$ ، $C(1+2i)$

طريقة 1:

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+2i-(1+3i)}{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i - (1+3i)} = \frac{1+2i-1-3i}{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i - 1 - 3i} = \frac{-i}{\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}i\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1; \frac{f}{3}\right]$$

1

طريقة 2:

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+2i-(1+3i)}{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i - (1+3i)} = \frac{1+2i-1-3i}{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i - 1 - 3i} = \frac{-i}{\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\left[1; \frac{f}{2}\right]}{\left[1; \frac{f}{6}\right]} = \left[1; \frac{f}{2} - \frac{f}{6}\right] = \left[1; \frac{f}{3}\right]$$

لدينا : $\frac{c-a}{b-a} = \left[1; \frac{f}{3}\right]$ منه : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{f}{3}[2f]$ و $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$

إذن : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{f}{3}[2f]$ و $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$ أي $|b-a| = |c-a|$ منه : $AB = AC$

2

3 بما أن $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{f}{3}[2f]$ و $AB = AC$ فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

3

تمرين 4 : $w = \frac{u}{v}$ ، $v = 1+i$ ، $u = 1+i\sqrt{3}$

$$w = \frac{u}{v} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}}{1-i^2} =$$

$$w = \frac{1+i(-1+\sqrt{3})+\sqrt{3}}{1+1} = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

1

لدينا: $v = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left[\sqrt{2}; \frac{f}{4}\right]$ و $u = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[2; \frac{f}{3}\right]$

منه: $w = \frac{u}{v} = \frac{\left[2; \frac{f}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}; \frac{f}{4}\right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{f}{3} - \frac{f}{4}\right] = \left[\sqrt{2}; \frac{f}{12}\right]$

2

لدينا حسب السؤال 2: $w = \left[\sqrt{2}; \frac{f}{12}\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{f}{12} + i\sin\frac{f}{12}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{f}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{f}{12}$

و حسب السؤال الأول: $w = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

إذن: $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{f}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sqrt{2}\sin\frac{f}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$ بالتالي: $\begin{cases} \cos\frac{f}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{f}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

3

ومنه: $\tan\frac{f}{12} = \frac{\sin\frac{f}{12}}{\cos\frac{f}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$

تمرين 5: $Z = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

$$Z^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}))^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + 2i(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i^2(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$$

$$Z^2 = 8 + 2\sqrt{12} + 8i - (8 - 2\sqrt{12}) = 4\sqrt{12} + 8i = 8\sqrt{3} + 8i$$

1

$$Z^2 = 8\sqrt{3} + 8i = 8(\sqrt{3} + i) = 8 \times 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left[16; \frac{f}{6}\right]$$

2

نضع: $Z = [r; \theta]$ حيث: $r \in \mathbb{R}^+$ و $\theta \in]-0; 2f]$ إذن: $Z^2 = [r^2; 2\theta]$

نستنتج إذن أن: $r^2 = 16$ منه: $r = 4$ وأن $\frac{f}{6} + 2kf / k \in Z$ أي $2\theta = \frac{f}{6} + 2kf / k \in Z$

وبما أن: $\theta \in]0; 2f]$ فإن: $0 < \frac{f}{12} + kf \leq 2f$

منه: $\frac{-f}{12} < kf \leq \frac{23f}{12}$ منه: $-\frac{1}{12} < k \leq \frac{23}{12}$ أو $k = 0$ أو $k = 1$ ، منه: $\theta = \frac{f}{12}$ أو $\theta = \frac{13f}{12}$

3

لكن ولكون: $\text{Re}(Z) > 0$ فإن: $\cos\theta > 0$ ، إذن: $\theta = \frac{f}{12}$ (لأن: $\cos\left(\frac{13f}{12}\right) < 0$)

بالتالي: $Z = \left[4; \frac{f}{12}\right]$

تحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي انطلاقاً من الشكل المثلثي لمربعه أو مكعبه أو بصفة عامة قوة له يتطلب تقنيات خاصة حيث نعطي رموزاً لمعياره وعمدته، ثم نحاول تحديدهما مستعملين وحدانية الشكل المثلثي والجبري، ونحتاج خلال ذلك للتأطير لحصر قيم العدد k وبالتالي حصر قيم العمدة ثم تحديده انطلاقاً من إشارة الجزء الحقيقي أو التخيلي

$$Z = \left[4 ; \frac{f}{12} \right] = 4 \left(\cos \frac{f}{12} + i \sin \frac{f}{12} \right) = 4 \cos \frac{f}{12} + 4 \sin \frac{f}{12} i \quad \text{لدينا حسب السؤال 2 :}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{f}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{f}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \text{بالتالي} \quad \begin{cases} 4 \cos \frac{f}{12} = \sqrt{6} + \sqrt{2} \\ 4 \sin \frac{f}{12} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{فإن} \quad Z = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad \text{و حيث أن}$$

$$\tan \frac{f}{12} = \frac{\sin \frac{f}{12}}{\cos \frac{f}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{6 - 2} = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{4} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ومنه :}$$

👉 لاحظ أن نتائج هذا التمرين تطابق نتائج التمرين السابق

4

رياضيات النجاح أذ سمير لخريسي