

## الدوال الأسية

مجموعة تعريف المعادلة هي :  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

نضع :  $e^{\frac{2x}{2x-1}} = X$  إذن :  $X > 0$

إذن :  $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0$

ومنه :  $(X-2)(X-1)(X+1) = 0$

إذن :  $X = 2$  أو  $X = 1$

ومنه :  $e^{\frac{2x}{2x-1}} = 2$  أو  $e^{\frac{2x}{2x-1}} = 1$

إذن :  $\frac{2x}{2x-1} = \ln 2$  أو  $\frac{2x}{2x-1} = 0$

ومنه :  $x = \frac{-\ln 2}{2(\ln 2 - 1)}$  أو  $x = 0$

$$S = \left\{ \frac{-\ln 2}{2(\ln 2 - 1)}; 0 \right\}$$

$$e^{2x} - 15e^x + 56 \geq 0 \quad -4$$

نضع :  $e^x = X$  إذن :  $X > 0$

إذن :  $X^2 - 15X + 56 \geq 0$

$X^2 - 15X + 56 = 0 \Leftrightarrow X = 8$  أو  $X = 7$

إذن :  $X^2 - 15X + 56 \geq 0$

يعني :  $X \in ]0; 7] \cup [8; +\infty[$

يعني :  $e^x \in ]0; 7] \cup [8; +\infty[$

يعني :  $x \in \ln(]0; 7] \cup [8; +\infty[)$

و بما أن :  $\ln$  تزايدية

فإن :  $x \in ]\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x; \ln 7] \cup \left[ \ln 8; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \right[$

$x \in ]-\infty; \ln 7] \cup [\ln 8; +\infty[$

ومنه :  $S = ]-\infty; \ln 7] \cup [\ln 8; +\infty[$

$$\frac{2 - 3e^{-x}}{1 - 3e^{-x}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2e^x - 3}{e^x - 3} < \frac{1}{2} \quad -5$$

نضع :  $e^x = X$  إذن :  $X > 0$

$$\frac{2e^x - 3}{e^x - 3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2X - 3}{X - 3} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2X - 3}{X - 3} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3X - 3}{2(X - 3)} < 0$$

$$\Leftrightarrow X \in ]1; 3[$$

$X \in ]1; 3[$

يعني :  $e^x \in ]1; 3[$

تمرين 1

حدد  $D_f$  :  $f(x) = \frac{\sqrt{e^{3x} - 5}}{\ln(28 - 3x)}$

الحل

تحديد  $D_f$  :  $f(x) = \frac{\sqrt{e^{3x} - 5}}{\ln(28 - 3x)}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^{3x} - 5 \geq 0 \text{ et } \ln(28 - 3x) \neq 0 \text{ et } 28 - 3x > 0\}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{\ln 5}{3} \text{ et } x \neq 9 \text{ et } x < \frac{28}{3} \right\}$$

$$D_f = \left[ \frac{\ln 5}{3}; 9[ \cup ]9; \frac{28}{3} \right[$$

تمرين 2

حل في  $\mathbb{R}$  :  $e^{2x} - 11e^x + 30 = 0$  -1

$$e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0 \quad -2$$

$$\frac{6x}{e^{2x-1}} - 2e^{2x-1} - e^{2x-1} + 2 = 0 \quad -3$$

$$e^{2x} - 15e^x + 56 \geq 0 \quad -4$$

$$\frac{2 - 3e^{-x}}{1 - 3e^{-x}} < \frac{1}{2} \quad -5$$

الحل

$$e^{2x} - 11e^x + 30 = 0 \quad -1$$

نضع :  $e^x = X$  إذن :  $X > 0$

$$X^2 - 11X + 30 = 0$$

نجد :  $X = 8$  أو  $X = 7$

إذن :  $e^x = 5$  أو  $e^x = 6$

ومنه :  $x = \ln 5$  أو  $x = \ln 6$

$$S = \{\ln 6; \ln 5\}$$

$$e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0 \quad -2$$

$$e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = e^{2x}(e^x - 2) - (e^x - 2) \\ = (e^x - 2)(e^{2x} - 1)$$

$$e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = (e^x - 2)(e^x - 1)(e^x + 1)$$

$$e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ ou } x = 0$$

$$S = \{\ln 2; 0\}$$

$$\frac{6x}{e^{2x-1}} - 2e^{2x-1} - e^{2x-1} + 2 = 0 \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x} \sqrt[3]{x^2}$$

-3 بنفس الطريقة نجد :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + e^{5x}}{2 - e^{3x}} \quad -4$$

نضع :  $t = e^x$  ومنه :  $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + e^{5x}}{2 - e^{3x}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{7 + t^5}{2 - t^3} \quad \text{إذن :} \\ &= - \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + e^{5x}}{2 - e^{3x}} = -\infty$$

ومنّه :

-5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 e^{4x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 e^x \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} \\ &= 0 \times 0^3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 e^{4x} = 0$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{11} e^{\frac{3}{4}x} \quad -6 \quad \text{حساب :}$$

نضع :  $t = \frac{3}{4}x$  ومنه :  $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{11} e^{\frac{3}{4}x} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{11} \lim_{t \rightarrow -\infty} t^{11} e^t \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{11} \times 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{11} e^{\frac{3}{4}x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x} + 1}{e^{2x} + e^{-x}} \quad -7$$

نضع :  $t = e^{-x}$  ومنه :  $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x} + 1}{e^{2x} + e^{-x}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{-3} + 1}{t^2 + t^{-1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 + 1}{t^5 + t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{t^5} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x} + 1}{e^{2x} + e^{-x}} = 0$$

يعني :  $x \in \ln(]1; 3[)$

و بما أن  $\ln$  تزايدية

فإن :  $x \in ]0; \ln 3[$

$$S = ]0; \ln 3[$$

**تمرين 3**

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}} \quad -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + e^{5x}}{2 - e^{3x}} \quad -4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x} \sqrt[3]{x^2} \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{11} e^{\frac{3}{4}x} \quad -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 e^{4x} \quad -5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^x}{x^2 + 3x + 1} \quad -8$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x} + 1}{e^{2x} + e^{-x}} \quad -7$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \quad -1 \quad \text{حساب :}$$

مباشرة :  $\frac{+\infty}{+\infty}$  شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x} \\ &= (+\infty) \times (+\infty) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} = +\infty$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}} \quad -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}} = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{35x}}{x^2} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{34x} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= (+\infty \times +\infty)^{\frac{1}{5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}}$$

إذن :

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-11} = 125 \quad \mathbf{-11} \quad 2^{x+1} = 5^x \quad \mathbf{-10}$$

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^{1+\sqrt{x}} \quad \mathbf{-12}$$

**الحل**

$$a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}$$

$$2^x = 6 \quad \mathbf{-1}$$

$$2^x = 6 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = 6$$

$$\Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 6}{\ln 2}$$

$$S = \left\{ \frac{\ln 6}{\ln 2} \right\}$$

$$2^x = 6 \Leftrightarrow \log_2(2^x) = \log_2(6)$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2(6)$$

$$S = \left\{ \log_2(6) \right\}$$

أو :

$$2^x = 16 \quad \mathbf{-2}$$

$$2^x = 16 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = 16$$

$$\Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 16$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \ln 2}{\ln 2}$$

$$S = \{4\}$$

$$3^x < 7 \quad \mathbf{-5}$$

$$3^x < 7 \Leftrightarrow e^{x \ln 3} < 7$$

$$\Leftrightarrow x \ln 3 < \ln 7$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{\ln 7}{\ln 3}$$

$$S = \left] -\infty; \frac{\ln 7}{\ln 3} \right[$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16 \quad \mathbf{-6}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16 = 6 \Leftrightarrow e^{-x \ln 2} < 6$$

$$\Leftrightarrow -x \ln 2 < \ln 6$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{\ln 6}{\ln 2}$$

$$S = \left] -\frac{\ln 6}{\ln 2}; +\infty \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^x}{x^2 + 3x + 1} \quad \mathbf{-8}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^x}{x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 3x + 1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2}}{1 + 3 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^x}{x^2 + 3x + 1} = -\infty$$

**تمرين 4**

حدد  $f'$  في كل حالة :

$$f(x) = (e^{2x} - 5) \ln(3x + 4) \quad \mathbf{-1}$$

$$f(x) = (e^{3x} + 4) \sqrt[3]{e^x + 2} \quad \mathbf{-2}$$

**الحل**

$$f'(x) = \left( (e^{2x} - 5) \ln(3x + 4) \right)' \quad \mathbf{-1}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \ln(3x + 4) + \frac{3(e^{2x} - 5)}{3x + 4}$$

$$f'(x) = \left( (e^{3x} + 4) \sqrt[3]{e^x + 2} \right)' \quad \mathbf{-2}$$

$$f'(x) = 3e^{3x} \sqrt[3]{e^x + 2} + \frac{e^x (e^{3x} + 4)}{3 \sqrt[3]{e^x + 2}^2}$$

**تمرين 5**

حل في  $\mathbb{R}$  :

$$2^x = 16 \quad \mathbf{-2}$$

$$10^x = 1000 \quad \mathbf{-4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16 \quad \mathbf{-6}$$

$$2^x = 6 \quad \mathbf{-1}$$

$$10^x = 600 \quad \mathbf{-3}$$

$$3^x < 7 \quad \mathbf{-5}$$

$$9^x - 2 \times 3^x + 1 = 0 \quad \mathbf{-7}$$

$$4^x - 2 \times 2^x - 15 > 0 \quad \mathbf{-8}$$

$$1000^x - 10^x < 0 \quad \mathbf{-9}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-11} = 125 \Leftrightarrow 5^{11-x^2} = 5^3$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5^{11-x^2}) = \log_5(5^3)$$

$$\Leftrightarrow 11-x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 9-x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt[4]{x})^{1+\sqrt{x}} \quad \text{-12}$$

مجموعة تعريف المعادلة :  $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt[4]{x})^{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{1+\sqrt{x}}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{x}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

### مسألة 1

**I -** نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $]-\infty; 0[$  بما يلي :

$$g(x) = x + 1 + \ln(-x)$$

بين أن :  $\forall x \in ]-\infty; 0[ : g(x) \leq 0$

**II -** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) & x \in ]-\infty; 0[ \\ f(0) = 0 \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

1- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  ثم أول النتيجة هندسيا .

3- أ- بين أن :  $f$  متصلة في 0

4- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

أول النتيجة هندسيا .

5- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

أول النتيجة هندسيا .

6- أ- بين أن :

$$9^x - 2 \times 3^x + 1 = 0 \quad \text{-7}$$

$$9^x - 2 \times 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 2 \times 3^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x \ln 3 = 0$$

$$S = \{0\}$$

$$4^x - 2 \times 2^x - 15 > 0 \quad \text{-8}$$

$$4^x - 2 \times 2^x - 15 > 0 \Leftrightarrow (2^x - 5)(2^x + 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x \in ]-\infty; -3[ \cup ]5; +\infty[$$

ولدينا :  $2^x > 0$

إذن :  $2^x \in ]5; +\infty[$

بما أن :  $2 > 1$

فإن :  $\log_2$  تزايدية قطعاً

إذن :  $\log_2(2^x) \in \log_2(]5; +\infty[)$

ومنه :  $x \in (] \log_2(5); +\infty[)$

$$S = ] \log_2(5); +\infty[$$

$$2^{x+1} = 5^x \quad \text{-10}$$

$$2^{x+1} = 5^x \Leftrightarrow e^{(x+1) \ln 2} = e^{x \ln 5}$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \ln 2 = x \ln 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 2}$$

$$2^{x+1} = 5^x \Leftrightarrow 2 \times 2^x = 5^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$$

أو

$$\Leftrightarrow x = \log_5 \left(\frac{2}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-11} = 125 \quad \text{-11}$$

**II- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :**

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) & x \in ]-\infty; 0[ \\ f(0) = 0 \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

**-1**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x \ln(-x) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 - 2t \ln(t) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left( 1 - 2 \frac{\ln(t)}{t} \right)$$

بما أن :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$  فإن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty (1 - 0) :$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

**2- نعلم أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$**

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$y = 1$  مقارب ل  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

**3- أ**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2x \ln(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 - 2t \ln(t)$$

بما أن :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$  فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 - 0$$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

-  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$

نضع :  $t = \frac{\ln(x)}{x}$

إذا كان :  $x \rightarrow 0^+$  فإن  $t \rightarrow -\infty$

$$\begin{cases} f'(x) = 2g(x) & x \in ]-\infty; 0[ \\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

ب- استنتج أن :  $f$  تناقصية على المجال :  $]-\infty; 0[$

تزايدية على المجال :  $]0; e[$

تناقصية على المجال :  $]e; +\infty[$

7- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

أول النتيجة هندسيا .

8- أ- بين أن  $(C_f)$  يقبل النقطة ذات الأفصول -1

نقطة انعطاف

ب- حدد معادلة المماس ل  $(C_f)$  عند النقطة

ذات الأفصول -1

ج- حدد معادلة المماس ل  $(C_f)$  عند النقطة

ذات الأفصول 1

9- ضع جدول تغيرات  $f$  ثم أنشئ  $(C_f)$  التمثيل

المبياني ل  $f$  على معلم متعامد ممنظم

(الوحدة 2cm)  $e^e \simeq 1,5$  ؛  $e \simeq 2,7$

**III** احسب  $A(\Delta)$  مساحة الحيز المحصور بين  $C_g$

و المستقيمين  $x = -1$  و  $x = -e$

**حل المسألة 1**

**I - نعتبر  $x$  من  $]-\infty; 0[$**

$$g(x) = x + 1 + \ln(-x)$$

$$g'(x) = \frac{x+1}{x}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$
$g(x)$		$\nearrow g(-1)$	$\searrow$

من جدول التغيرات نستنتج :

$$\forall x \in ]-\infty; 0[ : g(x) \leq g(-1)$$

بما أن :  $g(-1) = 0$

فإن :  $\forall x \in ]-\infty; 0[ : g(x) \leq 0$

فإن  $f$  تناقصية على المجال  $]-\infty; 0[$  :  
 لدينا  $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e$  :  
 إذن  $f$  تزايدية على المجال  $]0; e]$  :  
 و  $f$  تناقصية على المجال  $[e; +\infty[$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x \ln(-x)}{x} \quad -7$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 \ln(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -t + 2 \ln(t)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} t \left( -1 + 2 \frac{\ln(t)}{t} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0 \quad \text{ولدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty (-1 + 0) \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \text{إذن:}$$

ومنه : محور الأرتيب اتجاه مقارب ل  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$

$$f'(x) = 2g(x) \quad x \in ]-\infty; 0[ \quad \text{أ- لدينا}$$

$$f''(x) = 2g'(x) \quad x \in ]-\infty; 0[ \quad \text{إذن:}$$

و حسب I- :  $g'(-1) = 0$  و  $g'(x)$  تتغير إشارتها بجوار -1

إذن:  $f''(-1) = 0$  و  $f''(x)$  تتغير إشارتها بجوار -1

ومنه :  $(C_f)$  يقبل النقطة ذات الأفصول -1 نقطة انعطاف

$$\text{ب- لدينا : } f(-1) = 1 \text{ و } f'(-1) = 0$$

إذن:  $y = 1$  هي معادلة المماس ل  $(C_f)$  عند النقطة ذات الأفصول -1

$$\text{ج- لدينا : } f(1) = 1 \text{ و } f'(1) = 1$$

إذن:  $y = x$  هي معادلة المماس ل  $(C_f)$  عند النقطة ذات الأفصول 1

9-جدول تغيرات  $f$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{و لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{إذن:}$$

$$f \text{ متصلة في } 0 \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x \ln(-x)}{x} \quad -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 \ln(-x) = 0 - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \quad \text{إذن:}$$

ومنه :  $(C_f)$  يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى يسار

النقطة ذات الأفصول 0

-5

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} e^{\frac{\ln x}{x}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} e^{\frac{\ln x}{x}} \quad \text{حساب:}$$

$$t = \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{نضع:}$$

إذا كان  $x \rightarrow 0^+$  فإن  $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0 \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = -\infty \quad \text{و لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \times 0 \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

إذن:  $(C_f)$  يقبل نصف مماس أفقي يمين النقطة ذات الأفصول 0

-6 أ-

$$\begin{cases} f'(x) = 2g(x) & x \in ]-\infty; 0[ \\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

ب- بما أن  $g(x) \leq 0$  :  $\forall x \in ]-\infty; 0[$

و لدينا :  $f'(x) = 2g(x)$  على المجال  $]-\infty; 0[$

$$A(\Delta) = -\frac{1}{2} \int_{-e}^{-1} f'(x) dx \quad \text{إذن :}$$

$$A(\Delta) = -\frac{1}{2} [f(x)]_{-e}^{-1} \quad \text{ومنّه :}$$

$$A(\Delta) = -\frac{1}{2} [x^2 + 2x \ln(-x)]_{-e}^{-1} \quad \text{إذن :}$$

$$A(\Delta) = \frac{1}{2} (e^2 - 2e - 1) \quad \text{إذن :}$$

## مسألة 2

I-1- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بما يلي :

$$g(x) = -x + \frac{1}{2} + \ln(x)$$

بين أن :  $\forall x \in ]0; +\infty[ : g(x) < 0$

2- بين أن : حل المتراجحة  $2e^{2x} + e^x - 1 \geq 0$

في المجال  $]-\infty; 0[$  هو المجال  $[-\ln 2; 0]$

II- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = e^{2x} + e^x - x & x \in ]-\infty; 0[ \\ f(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^3}{3} + 2 & x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

1- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

أول النتيجة هندسيا .

3- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

4- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

أول النتيجة هندسيا .

5- أ- بين أن :  $f$  متصلة في 0

6- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2$

أول النتيجة هندسيا .

7- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

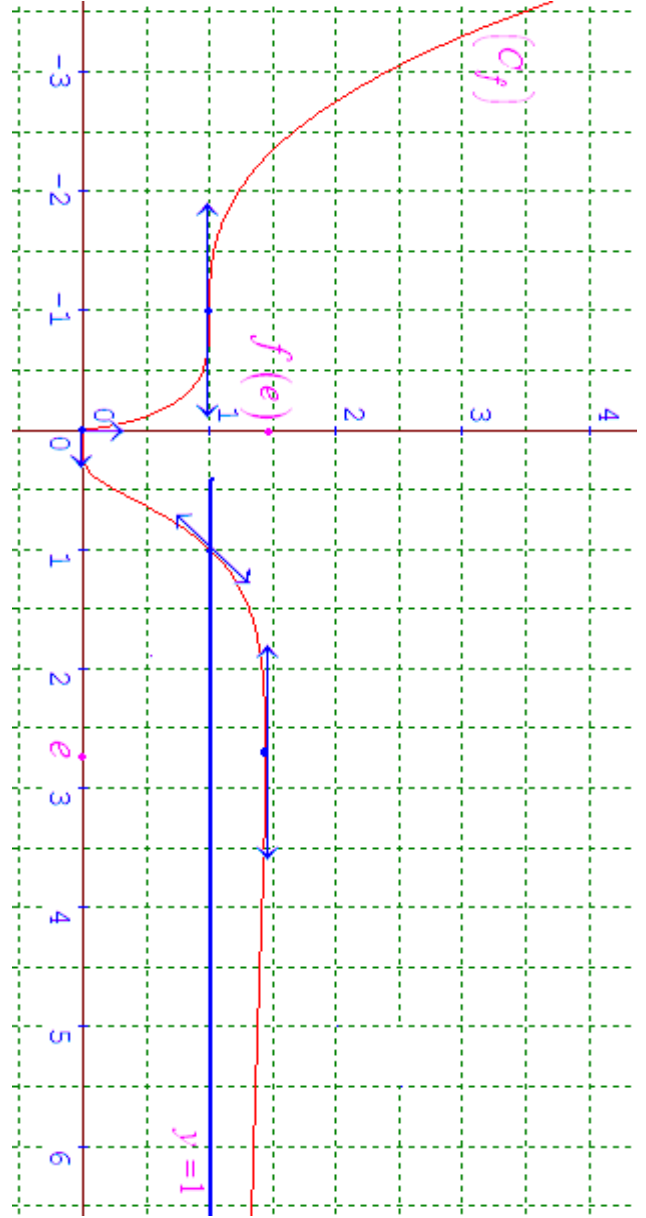
أول النتيجة هندسيا .

8- أ- بين أن :

$$\begin{cases} f'(x) = 2e^{2x} + e^x - 1 & x \in ]-\infty; 0[ \\ f'(x) = xg(x) & x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$e$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$\frac{1}{e^e}$	$1$

إنشاء  $(C_f)$



(الوحدة 2cm)  $e \simeq 2,7$  ؛  $\frac{1}{e^e} \simeq 1,5$

III حساب  $A(\Delta)$  مساحة الحيز المحصور بين  $C_g$

و المستقيمين  $x = -1$  و  $x = -e$

لدينا :  $\forall x \in ]-\infty; 0[ : g(x) \leq 0$

إذن :  $g(x) \leq 0$  سالبة على المجال  $[-e; -1]$

$$A(\Delta) = -\int_{-e}^{-1} g(x) dx \quad \text{ومنّه :}$$

ب- استنتج أن  $f$  تناقصية على المجال :  
 $]-\infty; -\ln 2]$

تزايدية على المجال :  
 $[-\ln 2; 0]$

تناقصية على المجال :  $]0; +\infty[$

9- ضع جدول تغيرات  $f$  ثم أنشئ  $(C_f)$  التمثيل المبياني

ل  $f$  على معلم متعامد ممنظم

(الوحدة 2cm)  $f(-\ln 2) \simeq 1,44$  ؛

$f(2,36) \simeq 0$

$\ln 2 = 0.7$

## حل المسألة 2

1-1- لدينا :  $\forall x \in ]0; +\infty[ : g(x) = -x + \frac{1}{2} + \ln(x)$

إذن :  $\forall x \in ]0; +\infty[ : g(x) = \frac{1-x}{x}$

$x$	0	1	$+\infty$
$g(x)$		$g(1)$	

من جدول التغيرات نستنتج :

$\forall x \in ]0; +\infty[ : g(x) \leq g(1)$

بما أن :  $g(1) = -\frac{1}{2}$

إذن :  $\forall x \in ]0; +\infty[ : g(x) < 0$

2- حل المتراجحة :  $2e^{2x} + e^x - 1 \geq 0$  في المجال

$]-\infty; 0]$

نضع :  $e^x = X$  إذن :  $X \in ]0; 1]$

إذن :  $2X^2 + X - 1 \geq 0$

نجد :  $X = -1$  أو  $X = \frac{1}{2}$

ومنه :  $2X^2 + X - 1 \geq 0$

يعني :  $X \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

يعني :  $e^x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

يعني :  $x \in \ln\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right)$

و بما أن :  $\ln$  تزايدية

فإن :  $x \in \left[\ln \frac{1}{2}; \ln 1\right]$

إذن :  $x \in [-\ln 2; 0]$

ومنه :  $S = [-\ln 2; 0]$

II- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = e^{2x} + e^x - x & x \in ]-\infty; 0] \\ f(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^3}{3} + 2 & x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

1-لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + e^x - x)$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 + 0 + \infty$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + e^x)$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0 + 0$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

إذن :  $y = -x$  مقارب ل  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$

3- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^3}{3} + 2 \right)$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( \frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{3} + \frac{2}{x^3} \right)$

نعلم أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \left( 0 - \frac{1}{3} + 0 \right)$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

4- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{x} \right)$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{3} + \frac{2}{x^3} \right)$

نعلم أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \left( 0 - \frac{1}{3} + 0 \right)$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$



إذن : محور الأرتاب اتجاه مقارب ل  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

5- أ- بين أن  $f$  متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} + e^x - x = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^3}{3} + 2 = 0 - 0 + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0 \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - 0 + 2 = 2 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{لدينا : } f(x) = e^{2x} + e^x - x \text{ لكل } x \text{ من } ]-\infty; 0]$$

$$f(0) = 1 + 1 - 0 = 2 \quad \text{بما أن : } 0 \in ]-\infty; 0] \text{ فإن :}$$

$$f(0) = 2 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{إذن : } f \text{ متصلة في } 0$$

$$\text{6- لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0}$$

$$\text{حساب : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0}$$

$$\text{نضع : } g(x) = e^{2x} + e^x - x$$

$g$  متصلة قابلة للإشتقاق في  $\mathbb{R}$

$$g'(0) = 2 \quad ; \quad g(0) = 2 \quad ; \quad g'(x) = 2e^{2x} + e^x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = g'(0) = 2$$

$$\text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{حساب : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} \text{ بطريقة أخرى}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} - 1$$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = 2 + 1 - 1 = 2 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{إذن : } f \text{ قابلة للإشتقاق يسار 0 و } f'_g(0) = 2$$

ومنه :  $(C_f)$  يقبل نصف مماس أفقي يسار النقطة ذات الأفصول 0 معادلته :  $y = 2x + 2$

7- لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x) - \frac{x^2}{3}}{x - 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \text{نعلم أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 - 0 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{إذن : } f \text{ قابلة للإشتقاق يمين 0 و } f'_d(0) = 0$$

ومنه :  $(C_f)$  يقبل نصف مماس أفقي يمين النقطة ذات الأفصول 0

8- أ

$$\begin{cases} f'(x) = 2e^{2x} + e^x - 1 & x \in ]-\infty; 0] \\ f'(x) = xg(x) & x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

$$\text{ب- من -1-1 : } g(x) < 0 \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

$$\text{و لدينا : } f'(x) = xg(x) \quad \forall x \in ]-\infty; 0]$$

$$\text{إذن : } f \text{ تناقصية على المجال : } ]0; +\infty[$$

$$\text{من -2-2 : حل المتراجحة } 2e^{2x} + e^x - 1 \geq 0$$

$$\text{في المجال } ]-\infty; 0] \text{ هو المجال } [-\ln 2; 0]$$

$$\text{و لدينا : } \forall x \in ]-\infty; 0] : f'(x) = 2e^{2x} + e^x - 1$$

$$\text{إذن : } f \text{ تناقصية على المجال : } ]-\infty; -\ln 2]$$

$$f \text{ تزايدية على المجال : } [-\ln 2; 0]$$

- أول النتيجة هندسيا  
4- أ- بين أن  $f$  متصلة في 0  
5- أ - بين أن :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2} \quad x \in \mathbb{R}^*$$

- 6- ضع جدول تغيرات  $f$  ثم أنشئ  $(C_f)$  التمثيل المبياني ل  $f$  على معلم متعامد ممنظم (الوحدة 2cm)  
قبل أن  $f$  قابلة للاشتقاق في 0

### مبرهنة التزايديات المنتهية

#### تمرين 1

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

بين أن :  $\exists c \in ]1; 2[ / f'(c) = 0$

#### الحل

- لدينا :  $f$  دالة عددية متصلة على  $[1; 2]$  قابلة للاشتقاق على  $]1; 2[$  و  $f(1) = f(2)$   
إذن حسب مبرهنة رول  
 $\exists c \in ]1; 2[ / f'(c) = 0$

#### تمرين 2

- $f$  و  $g$  دالتان عديتان متصلتان على  $[a; b]$  قابلتان للاشتقاق على  $]a; b[$

$$\forall x \in ]a; b[ \quad g'(x) \neq 0$$

$$\exists c \in ]a; b[ / \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

#### الحل

نطبق مبرهنة رول على :

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$$

#### تمرين 3

$f$  دالة عددية قابلة للاشتقاق على  $[0; 1]$

بحيث :  $f(0) = 0$  و  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in ]0; 1[$

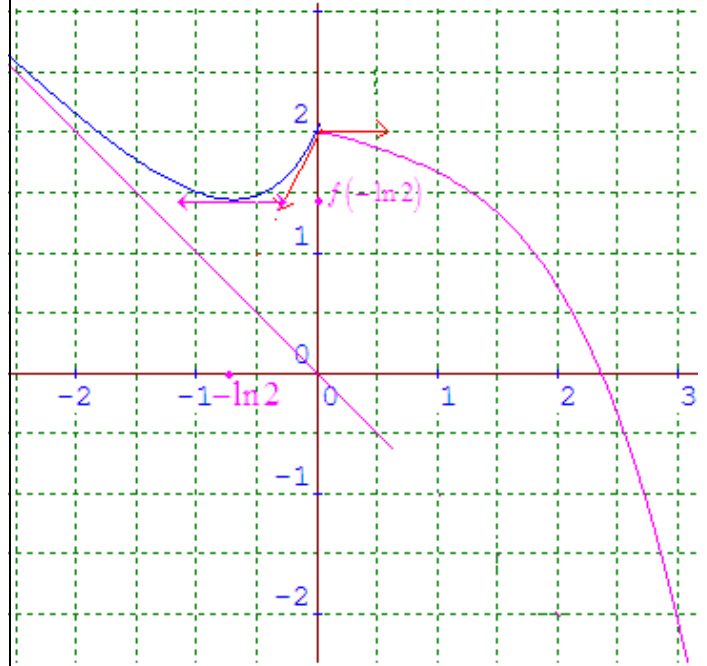
$$(n; m) \in \mathbb{Q}_*^2$$

$$\exists c \in ]0; 1[ / n \frac{f'(c)}{f(c)} = m \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

#### 9- جدول تغيرات $f$

$x$	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\ln 2)$	2	$-\infty$

إنشاء  $(C_f)$



$$f(2,36) \simeq 0 ; \quad f(-\ln 2) \simeq 1,44 \quad (\text{الوحدة } 2cm)$$

$$\ln 2 = 0.7$$

### مسألة 3

I-1- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

بين أن :  $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0$

II- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

أول النتيجة هندسيا

$$3- \text{بين أن : لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^* : f(x) = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

استنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$