

$$(t = \ln x) \quad I = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx - 2$$

$$\left(t = \frac{1}{x}\right) \quad I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx - 3$$

$$\left(x = \frac{1}{\sin t}\right) \quad I = \int_{2\sqrt{3}}^2 \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx - 4$$

تمرين 4

$$f(x) = \sin x - 1$$

$A(\Delta)$ مساحة الحيز المحصور بين C_f والمستقيمين

$$x = 2\pi \text{ و } x = 0$$

$$f(x) = x^2 - 4 - 2$$

$A(\Delta)$ مساحة الحيز المحصور بين C_f والمستقيمين

$$x = 8 \text{ و } x = 2$$

$$g(x) = x^2 \text{ و } f(x) = x^3$$

3- حدد $A(\Delta)$ مساحة الحيز Δ المحصور بين C_f و C_g

$$\text{و المستقيمين } x = 3 \text{ و } x = -1$$

تمرين 5

$$f(x) = x^2 ; f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R} - 1$$

أ- احسب V_C حجم مجسم الدوران C المحصل عليه بدوران C_f حول محور الأفاصيل .

أ- احسب V_C' حجم مجسم الدوران C' المحصل عليه بدوران C_f حول محور الأراتيب .

2- احسب V_C حجم المجسم C

$$C = \left\{ M(x; y) \in (P) / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}; 0 \leq y \leq 1 + \cos 3x \right\}$$

تمرين 6

$$1- \text{ حدد إشارة } I = \int_2^3 \frac{x-1}{x+1} dx \text{ بدون حساب } I$$

$$2- \text{ أظر } I = \int_2^3 \frac{x-1}{x+1} dx \text{ بدون حساب } I$$

$$3- \text{ حدد القيمة المتوسطة لـ } f(x) = \sqrt{x} \text{ على } [1; 4]$$

تمرين 7

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

1- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد علاقة بين I_n و I_{n-1}

2- احسب I_0 ثم احسب I_n بدلالة n

الحل

الحساب التكاملي

تمرين 1

احسب ما يلي :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx - 2 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx - 1$$

$$I = \int_0^1 e^x dx - 4 \quad I = \int_1^e \frac{1}{x} dx - 3$$

$$(\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx - 5$$

$$I = \int_2^3 (3x^2 + x - 1) dx - 7 \quad I = \int_2^4 3x dx - 6$$

$$I = \int_0^1 \sqrt[3]{x^5} dx - 9 \quad I = \int_0^1 \frac{1}{3x+1} dx - 8$$

$$((\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}) \quad I = \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx - 10$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} dx - 12 \quad I = \int_0^1 6x e^{3x^2+1} dx - 11$$

$$I = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx - 14 \quad I = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx - 13$$

$$I = \int_1^e \frac{3x^3+1}{x} dx - 16 \quad I = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx - 15$$

$$I = \int_3^4 \frac{x-6}{x^2-4} dx - 18 \quad I = \int_0^{e-1} \frac{3x}{x+1} dx - 17$$

$$(\text{تحقق أن : } \frac{x-6}{x^2-4} = \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x+2})$$

تمرين 2

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx - 2 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx - 1 \text{ احسب :}$$

$$F(x) = \int_e^x \ln t dt - 4 \quad \int_1^e x \ln x dx - 3$$

تمرين 3

احسب :

$$(t = e^x) \quad I = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx - 1$$

$$I_n = \frac{2^{2(n+1)} (n+1)! \times n!}{(2n+3)!}$$

تمرين 8

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{(1-x)} dx$$

أ - أول هندسيا u_n

ب - حدد u_n بدلالة n ثم استنتج أن (u_n) هندسية متقاربة

$$A_n = u_0 + \dots + u_n \quad \text{ج -}$$

حدد A_n بدلالة n ثم بين أن A_n متقاربة

احسب : $\lim A_n$

تمرين 9

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx \quad \text{احسب : -1}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \cos 5x dx \quad \text{-3} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx \quad \text{-2}$$

$$I = \int_1^3 \frac{x}{x^2 + 2x + 3} dx \quad \text{-5} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad \text{-4}$$

الحل

$$\sin^5 x = -\frac{1}{16} (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x) \quad \text{-1}$$

$$\sin^3 x \cos^2 x = -\frac{1}{16} (\sin 5x - \sin 3x - 2 \sin x) \quad \text{-2}$$

$$\cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b)) \quad \text{-3}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \tan'(x) dx \quad \text{-4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx = -\left[\ln(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} : \text{مكاملة بالأجزاء ثم : -5}$$

$$I = \int_1^3 \frac{x}{x^2 + 2x + 3} dx \quad t = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$= \frac{1}{4} \times \int_1^3 \frac{x}{\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 + 1} dx \quad dt = \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \int_1^2 \frac{2t-1}{t^2+1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\int_1^2 \frac{2t}{t^2+1} dt - \int_1^2 \frac{1}{t^2+1} dt \right)$$

$$I = \frac{1}{2} \times \left(\left[\ln(t^2+1) \right]_1^2 - \left[\arctan(t) \right]_1^2 \right)$$

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx \quad v' = \sqrt{1-x} = \left(-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right)'$$

$$= \left[-\frac{2}{3} x^n (1-x) \sqrt{1-x} \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 nx^{n-1} (1-x) \sqrt{1-x} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 nx^{n-1} \sqrt{1-x} dx - \frac{2}{3} \int_0^1 nx^n \sqrt{1-x} dx$$

$$I_n = \frac{2}{3} n I_{n-1} - \frac{2}{3} n I_n$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$$

إنن :

-2

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$I_0 = \frac{2}{3}$$

إنن :

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+3} \times \dots \times \frac{2(n-k)}{2(n-k)+3} I_{n-(k+1)}$$

$$k = n-1$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+3} \times \dots \times \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 3} I_0$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+3} \times \dots \times \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 3} \times \frac{2}{3}$$

$$I_n = \frac{2^{n+1} \times n!}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+3)}$$

إنن :

$$A_n = 3 \times 5 \times \dots \times (2n+3)$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2n+2) \times (2n+3)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n+2)}$$

$$= \frac{(2n+3)!}{2 \times 1 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 \times (n+1)}$$

$$3 \times 5 \times \dots \times (2n+3) = \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} (n+1)!}$$

$$I_n = 2^{n+1} \times n! \times \frac{(n+1)!}{(2n+3)!}$$

تمرين 10

f متصلة وزوجية على مجال $[-a; a]$ ($a > 0$; $a \neq 1$)

$$\text{بين أن : } \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx$$

$$J = \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 1 + e^x}{e^x + 1} dx \quad \text{استنتج :}$$

الحل

-1

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a \left(\frac{f(x)}{1+e^x} + \frac{f(-x)}{1+e^{-x}} \right) dx$$

$$= \int_0^a f(x) \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx$$

$$\boxed{\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx}$$

-2

$$J = \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 1 + e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 1}{e^x + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \int_0^1 (3x^2 + 1) dx + \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \left[x^3 + x \right]_0^1 + \left[\ln(e^x + 1) \right]_{-1}^1$$

$$\boxed{I = 1 + \ln \left(\frac{e+1}{e^{-1}+1} \right)}$$

تذكير:

إذا كان g متصلة على مجال $[a; b]$

و $u(x); v(x)$ قابلتان للإشتقاق على مجال I

و $v(I) \subset [a; b]; u(I) \subset [a; b]$

$$\text{و : } f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(t) dt$$

فإن f قابلة للإشتقاق على المجال I

$$\text{و } f'(x) = v'(x)g(v(x)) - u'(x)g(u(x))$$

تمرين 14

$$\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \ln(e^t - 1) dt & x \in \mathbb{R}_+^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

-1 بين أن f متصلة قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}_+^*

$$\text{-1 احسب : } I = \int_{-\ln 2}^0 \frac{1}{1+2e^x} dx$$

-2 باستعمال مكاملة بالأجزاء احسب :

$$J = \int_{-\ln 2}^0 e^{-x} \ln(1+2e^x) dx$$

الحل

-1

$$I = \int_{-\ln 2}^0 \frac{1}{1+2e^x} dx \quad t = e^x$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t(1+2t)} dt \quad dt = t dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+2t} \right) dt$$

$$= \left[\ln t \right]_{\frac{1}{2}}^1 - 2 \left[\ln(1+2t) \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$\boxed{I = \ln \frac{8}{9}}$$

$$J = \int_{-\ln 2}^0 e^{-x} \ln(1+2e^x) dx \quad \text{-2}$$

تمرين 11

$$A = \int_0^1 (2 + \cos x) e^{1-x} dx$$

$$A = 2e - 2 + \int_0^1 \cos x \cdot e^{1-x} dx \quad \text{-1 بين أن}$$

$$\text{-2 نضع : } I = \int_0^1 \cos x \cdot e^{1-x} dx \text{ و } J = \int_0^1 \sin x \cdot e^{1-x} dx$$

باستعمال مكاملة بالأجزاء

$$\text{بين أن : } I = -\cos(1) + e - J \quad ; \quad J = \sin(1) + I$$

-3 احسب A

تمرين 12

f متصلة على مجال $[-a; a]$ ($a > 0$)

$$\text{-1 بين أن : } \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx$$

$$\text{-2 بين أن إذا كانت } f \text{ فردية فإن : } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$\text{-3 بين أن إذا كانت } f \text{ زوجية فإن : } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{استنتج أن : } I = \int_{-1}^1 (2 + \cos x) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx = 0$$

تمرين 13

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} xg(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(e^x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \ln(e^x - 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \ln(e^x - 1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} xg(x) &= 1 \times 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} xg(x) = 0}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} xg(2x) &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2xg(2x) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} tg(t)\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} xg(2x) = 0}$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq 0 \quad \text{و منه :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0} \quad \text{إذن :}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{و بما أن :}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= f(0) \quad \text{فإن :} \\ \text{إذن : } f &\text{ متصلة في } 0 \text{ على اليمين}\end{aligned}$$

د- اشتقاق f في 0 على اليمين

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x) \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^{2x} - 1) \quad \text{لدينا :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x) = -\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x) \quad \text{بما أن :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty} \quad \text{فإن :}$$

إذن : اشتقاق f غير قابلة للإشتقاق في 0 على اليمين

و : (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل يمين

النقطة ذات الأفصول 0

2- نعتبر : $x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \ln(e^x - 1)$
أ- ادرس رتبة g

ب- استنتج أن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x)$

ج- بين أن f متصلة في 0 على اليمين

د- ادرس اشتقاق f في 0 على اليمين

$$\text{هـ - احسب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

الحل

نعتبر : $x \in \mathbb{R}_+^* \quad v(x) = x^2 ; u(x) = x$

$$x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \ln(e^x - 1)$$

1- لنبين أن : f متصلة قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}_+^*

لدينا : g متصلة على \mathbb{R}_+^*

و $v(x) ; u(x)$ قابلتان للإشتقاق على \mathbb{R}_+^*

$$v(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^* ; u(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$$

إذن : f متصلة قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}_+^*

2- أ- رتبة g

$$x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

بما أن : $x > 0$ فإن : $e^x - 1 > 0$
إذن : g تزايدية قطعا

ب- نستنتج أن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x)$

لدينا : $x \leq t \leq 2x$

بما أن : g تزايدية فإن : $g(x) \leq g(t) \leq g(2x)$

و بما أن : $x < 2x$

$$\text{فإن : } \int_x^{2x} g(x) dt \leq \int_x^{2x} g(t) dt \leq \int_x^{2x} g(2x) dt$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* : xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x)} \quad \text{و منه :}$$

ج- لنبين أن : f متصلة في 0 على اليمين

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x) \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} xg(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} xg(2x)$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in [1;2] \quad \text{نعتبر :}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim u_n = \int_1^2 f(x) dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= [\ln x]_1^2$$

$$\boxed{\lim u_n = \ln 2}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \quad - 2$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x \in [1;2] \quad \text{نعتبر :}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim u_n = \int_1^2 f(x) dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= [2\sqrt{x}]_1^2$$

$$\boxed{\lim u_n = 2(\sqrt{2}-1)}$$

$$u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \quad -3$$

$$u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{هـ - حساب :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*: xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x) \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} xg(2x) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(e^x - 1)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{بما أن :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{فإن :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*: xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x) \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(2x) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 1)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{بما أن :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty} \quad \text{فإن :}$$

تمرين 15

احسب $\lim u_n$ في كل حالة

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad -1$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \quad -2$$

$$u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \quad -3$$

$$u_n = n \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad -4$$

الحل

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad -1$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [0;1] \quad \text{نعتبر :}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim u_n = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{ومنه :}$$
$$= [\arctan x]_0^1$$

$$\lim u_n = \frac{\pi}{4}$$

$$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} \quad -4$$

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad x \in [0;1] \quad \text{نعتبر :}$$

$$\ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim \ln u_n = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 \ln(1+x) dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= [(1+x) \ln(1+x) - x]_0^1$$

$$\lim \ln u_n = 2 \ln 2 - 1$$

بما أن e^x متصلة على $2 \ln 2 - 1$

$$\lim e^{\ln u_n} = e^{2 \ln 2 - 1} \quad \text{فإن :}$$

$$\lim u_n = \frac{4}{e} \quad \text{ومنه :}$$