

الهندسة الفضائية

التمرين 1

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
نعتبر النقط $A(2,0,0)$ و $B(2,2,2)$ و $C(0,0,2)$ و $I(2,1,2)$ و $J(0,-1,0)$

- (1) حدد مثلث إحداثيات $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
- (2) استنتج أن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) $x - y + z - 2 = 0$
- (3) تأكد أن المستقيم (IJ) عمودي على المستوى (ABC)
- (4) لتكن (S) الفلكة التي مركزها I و المماسة للمستوى (ABC)
أ. حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S)
ب. حدد مثلث إحداثيات نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (ABC)

التصحيح

(1) لدينا : $\overrightarrow{AB}(0,2,2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,2,2)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \quad \text{إذن}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \quad \text{ومنه}$$

(2) لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منتظمة للمستوى (ABC)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $4x + 4y + 4z + d = 0$

و بما أن $A(2,0,0) \in (ABC)$ فإن : $4(2) + 4(0) + 4(0) + d = 0$ و منه $d = -8$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $4x + 4y + 4z - 8 = 0$

و منه نستنتج أن : $x + y + z - 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

3) لدينا $\vec{IJ}(-2, -2, -2)$ متجهة موجهة للمستقيم (IJ) و لدينا $\vec{AB}(4, 4, 4)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC)

و نلاحظ أن : $\vec{IJ} = \frac{-1}{2}\vec{AB}$ إذن \vec{IJ} و \vec{AB} مستقيمتان

و منه \vec{IJ} هي أيضا متجهة منظمية للمستوى (ABC)

و بالتالي المستقيم (IJ) عمودي على المستوى (ABC)

4) أ. لدينا (S) الفلكة التي مركزها $I(2, 1, 2)$ و المماسة للمستوى (ABC)

إذن شعاع الفلكة (S) يساوي $d(I, (ABC))$

لنحسب $d(I, (ABC))$:

$$d(I, (ABC)) = \frac{|(2) + (1) + (2) - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

و منه (S) الفلكة التي مركزها $I(2, 1, 2)$ و شعاعها $r = \sqrt{3}$

إذن معادلة ديكارتية للفلكة (S) تكتب على شكل : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = (\sqrt{3})^2$

ب. ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة $I(2, 1, 2)$ و العمودي على المستوى (ABC)

و بما أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(4, 4, 4)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) فإن $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(4, 4, 4)$ هي أيضا

متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{إذن تمثيل بارامترى للمستقيم } (\Delta) \text{ يكتب على شكل :}$$

لتكن $H(x_H, y_H, z_H)$ نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (ABC)

$$\begin{cases} x_H = 2 + 4t \\ y_H = 1 + 4t \\ z_H = 2 + 4t \\ x_H + y_H + z_H - 2 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (S)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_H = 2 + 4t \\ y_H = 1 + 4t \\ z_H = 2 + 4t \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$$
$$(2 + 4t) + (1 + 4t) + (2 + 4t) - 2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_H = 2 + 4t \\ y_H = 1 + 4t \\ z_H = 2 + 4t \\ t = \frac{-1}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_H = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

و بالتالي النقطة $H(1,0,1)$ هي نقطة تماس الفلحة (S) و المستوى (ABC)