

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n^2 + 5} \end{cases} ; n \geq 0$$

**تمرين 1:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة كما يلي:

$$(1) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$$

$$(2) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{5} u_n$$

$$(3) \text{ استنتج أن: } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$(4) \text{ استنتج أن } (u_n) \text{ متقاربة و احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \end{cases} ; n \geq 0$$

$$(1) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 4$$

$$(2) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{4}$$

$$(3) \text{ استنتج أن } (u_n) \text{ متقاربة و احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases} ; n \geq 0$$

$$(1) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 3$$

$$(2) \text{ ادرس رقابة المتتالية } (u_n)$$

$$(3) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 3 > \frac{9}{5} (u_n - 3)$$

$$(4) \text{ استنتج أن: } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n + 3$$

$$(5) \text{ استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{، هل المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة؟}$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} (u_n + \sqrt{u_n + 2}) \end{cases} ; n \geq 0$$

**تمرين 4:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة كما يلي:

$$(1) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n < 4$$

$$(2) \text{ ادرس رقابة المتتالية } (u_n)$$

$$(3) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3} (4 - u_n)$$

$$(4) \text{ استنتج أن } (u_n) \text{ متقاربة و احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases} ; n \geq 0$$

**تمرين 5:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة كما يلي:

$$(1) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$$

$$(2) \text{ ادرس رقابة المتتالية } (u_n)$$

$$(3) \text{ استنتج أن } (u_n) \text{ متقاربة و احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

4) نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \geq 0}$  حيث:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

أ) بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية محددًا أساسها و حدها الأول

ب) احسب  $u_n$  بدلالة  $n$

5) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  بطريقة أخرى.

رياضيات النجـاح أذ سمير لخريسي

سلسلة 2	المتاليات العددية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية
<b>تمرين 1:</b> $u_0 = 1 ; u_{n+1} = \frac{u_n}{n^2 + 5} ; n \geq 0$		
<p style="text-align: center;"><math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &gt; 0</math> لنبين بالترجع أن</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• بالنسبة لـ <math>n=0</math> العبارة صحيحة لأن: <math>u_0 = 1</math> و <math>1 &gt; 0</math></li> <li>• نفترض أن <math>u_n &gt; 0</math> ونبين أن <math>u_{n+1} &gt; 0</math></li> </ul> <p>لدينا: <math>u_n &gt; 0 \Rightarrow \frac{u_n}{n^2 + 5} &gt; 0 \Rightarrow u_{n+1} &gt; 0</math> ، بالتالي وحسب مبدأ التراجع فإن: <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &gt; 0</math></span></p>		
<p style="text-align: center;"><math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{5} u_n</math> لنبين أن</p> <p>لدينا: <math>u_{n+1} - \frac{1}{5} u_n = \frac{u_n}{n^2 + 5} - \frac{1}{5} u_n = u_n \left( \frac{1}{n^2 + 5} - \frac{1}{5} \right) = u_n \left( \frac{5 - n^2 - 5}{5(n^2 + 5)} \right) = \frac{-n^2 u_n}{5(n^2 + 5)} &lt; 0</math> (لأن <math>u_n &gt; 0</math>)</p> <p>يمكن بسهولة و باستعمال التأطير إثبات المتفاوتة المطلوبة، لكن الطريقة المستعملة تعتبر أفضل لكونها أعم، إذ في بعض الحالات يكون حساب الفرق وتحديد إشارته الطريقة الوحيدة</p>		
<p style="text-align: center;">لنبين أن: <math>0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n</math> ، المتفاوتة <math>0 \leq u_n</math> سبق إثباتها في السؤال الأول</p>		
طريقة 2		طريقة 1
<p>نعلم أن: <math>u_{n+1} \leq \frac{1}{5} u_n</math> (حسب السؤال السابق)</p> $\begin{cases} u_1 \leq \frac{1}{5} u_0 \\ u_2 \leq \frac{1}{5} u_1 \\ \dots \leq \dots \\ \dots \leq \dots \\ u_n \leq \frac{1}{5} u_{n-1} \end{cases}$ <p style="text-align: center;">إذن:</p> <p style="text-align: center;">منه:</p> $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$ <p>منه: <math>u_n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n u_0</math> بالتالي: <math>u_n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n</math> لنبين بالترجع أن</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• بالنسبة لـ <math>n=1</math> العبارة صحيحة لأن: <math>u_1 = \frac{u_0}{0+5} = \frac{1}{5}</math> و <math>\frac{1}{5} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^1</math></li> <li>• نفترض أن <math>u_n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n</math> ونبين أن <math>u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}</math></li> </ul> <p>لدينا <math>u_n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n</math> إذن: <math>\frac{1}{5} u_n \leq \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^n</math></p> <p>أي <math>\frac{1}{5} u_n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}</math></p> <p>ونعلم أن: <math>u_{n+1} \leq \frac{1}{5} u_n</math> (حسب السؤال السابق)</p> <p>إذن: <math>u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}</math></p>	
<p>يجب الانتباه أثناء استعمال الطريقة الثانية، إذ يجب التحقق أن جميع أطراف المتفاوتات موجبة وأيضا تحديد عدد المتفاوتات لأن هذا العدد يمثل أس القوة <math>\left(\frac{1}{5}\right)^n</math></p>		
<p>لدينا: <math>\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n</math> و <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0</math> و <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0</math></p> <p>إذن حسب مصاديق التقارب: <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0</math> بالتالي <math>u_n</math> متقاربة نهايتها 0.</p>		
<p>لاحظ أننا قمنا أولا بحساب النهاية وهو ما أثبت مباشرة تقارب المتتالية، وذلك لأن السؤال لم يحدد إجبارية إثبات التقارب أولا (واو العطف يمكنك من اختيار الترتيب الذي تريد)</p>		

**تمرين 2:**  $u_0 = -3$  ;  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$  ;  $n \geq 0$

لنبين بالترجع أن  $\forall n \in \mathbb{N}$   $u_n < 4$

• بالنسبة لـ  $n=0$  العبارة صحيحة لأن:  $u_0 = -3$  و  $-3 < 4$

• نفترض أن  $u_n < 4$  ونبين أن  $u_{n+1} < 4$

لدينا:  $u_n < 4 \Rightarrow u_n + 12 < 16 \Rightarrow \sqrt{u_n + 12} < 4 \Rightarrow u_{n+1} < 4$

بالتالي وحسب مبدأ الترجع فإن:  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 4}$

1

لنبين أن  $\forall n \in \mathbb{N}$   $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{4}$

لدينا:  $4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{u_n + 12} = \frac{(4 - \sqrt{u_n + 12})(4 + \sqrt{u_n + 12})}{4 + \sqrt{u_n + 12}} = \frac{16 - u_n - 12}{4 + \sqrt{u_n + 12}} = \frac{4 - u_n}{4 + \sqrt{u_n + 12}}$

ولدينا:  $\frac{4 - u_n}{4 + \sqrt{u_n + 12}} \leq \frac{4 - u_n}{4}$  إذن:  $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{4}$

2

استعمال الطرح أو الترجع في هذا السؤال لا يسمح بالبرهان بسهولة وذلك لصعوبة التخلص من الجذر مربع ، لذلك استعملنا المرافق

نعلم أن:  $\forall n \in \mathbb{N}$   $0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{4}$  (حسب السؤال السابق) إذن:

منه:  $0 < (4 - u_1) \times (4 - u_2) \times \dots \times (4 - u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (4 - u_0) \times (4 - u_1) \times \dots \times (4 - u_{n-1})$

منه:  $0 < 4 - u_1 \leq \frac{4 - u_0}{4}$   
 $0 < 4 - u_2 \leq \frac{4 - u_1}{4}$   
 $\dots \leq \dots$   
 $\dots \leq \dots$   
 $0 < 4 - u_n \leq \frac{4 - u_{n-1}}{4}$

3

منه:  $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (4 - u_0)$  منه:  $0 < 4 - u_n \leq 7 \left(\frac{1}{4}\right)^n$  منه:  $4 - 7 \left(\frac{1}{4}\right)^n < u_n \leq 4$

وبما أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - 7 \left(\frac{1}{4}\right)^n = 4 - 0 = 4$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = 4$  فإن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

لاحظ أن فكرة حل التمرين تم التطرق إليها في التمرين السابق.

**تمرين 3:**  $u_0 = 4$  ;  $u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2}$  ;  $n \geq 0$

لنبين بالترجع أن  $\forall n \in \mathbb{N}$   $u_n > 3$

• بالنسبة لـ  $n=0$  العبارة صحيحة لأن:  $u_0 = 4$  و  $4 > 3$

• نفترض أن  $u_n > 3$  ونبين أن  $u_{n+1} > 3$

لدينا:  $u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3 - 3u_n - 6}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$

لنعمل الحدودية:  $2t^2 - 3t - 9$  ، محددها هي:  $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81$

منه:  $t_1 = \frac{3-9}{4} = \frac{-3}{2}$  و  $t_2 = \frac{3+9}{4} = 3$

منه:  $2t^2 - 3t - 9 = 2(t - t_1)(t - t_2) = 2\left(t + \frac{3}{2}\right)(t - 3) = (2t + 3)(t - 3)$

منه:  $u_{n+1} - 3 = \frac{(2u_n + 3)(u_n - 3)}{u_n + 2}$  ولدينا حسب الافتراض:  $u_n > 3$  أي  $u_n - 3 > 0$

1

إذن:  $0 < u_{n+1} - 3 < u_{n+1}$  أي  $u_{n+1} > 3$ ، بالتالي وحسب مبدأ التراجع فإن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 3$

لدينا:  $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$

لنعمل الحدودية:  $t^2 - 2t - 3$ ، محددتها هي:  $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$

منه:  $t_1 = \frac{2+4}{2} = 3$  و  $t_2 = \frac{2-4}{2} = -1$  منه:  $t^2 - 2t - 3 = 1(t - t_1)(t - t_2) = (t + 1)(t - 3)$

منه:  $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 2} > 0$  (لأن:  $u_n > 3$ ) بالتالي  $u_n$  تزايدية قطعاً

🌱 لاحظ من خلال هذا السؤال و السؤال السابق أهمية تعميل حدودية من الدرجة الثانية في تحديد إشارة فرق.

$$u_{n+1} - 3 - \frac{9}{5}(u_n - 3) = \frac{(2u_n + 3)(u_n - 3)}{u_n + 2} - \frac{9}{5}(u_n - 3) = (u_n - 3) \left( \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{9}{5} \right)$$

$$u_{n+1} - 3 - \frac{9}{5}(u_n - 3) = (u_n - 3) \left( \frac{10u_n + 15 - 9u_n - 18}{5(u_n + 2)} \right)$$

$$u_{n+1} - 3 - \frac{9}{5}(u_n - 3) = (u_n - 3) \left( \frac{u_n - 3}{5(u_n + 2)} \right) = \frac{(u_n - 3)^2}{5(u_n + 2)} > 0$$

بالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 3 > \frac{9}{5}(u_n - 3)$

🌱 لاحظ أن حساب الفرق و تحديد إشارة يعتبر من بين أهم طرق البرهان في مثل هذه الحالات.

لنبين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n + 3$

طريقة 2

نعلم أن:  $u_{n+1} - 3 > \frac{9}{5}(u_n - 3)$  (حسب السؤال السابق)

$$\begin{cases} u_1 - 3 \geq \frac{9}{5}(u_0 - 3) \\ u_2 - 3 \geq \frac{9}{5}(u_1 - 3) \\ \dots \geq \dots \\ \dots \geq \dots \\ u_n - 3 \geq \frac{9}{5}(u_{n-1} - 3) \end{cases} \quad \text{إذن:}$$

وبضرب المتفاوتات طرفاً بطرف ثم الاختزال

نجد أن:  $u_n - 3 \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n (u_0 - 3)$

أي  $u_n - 3 \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n$  بالتالي:  $u_n \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n + 3$

طريقة 1

لنبين بالتراجع أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n + 3$

• بالنسبة لـ  $n=0$  العبارة صحيحة لأن:

•  $u_0 = 4$  و  $\left(\frac{9}{5}\right)^0 + 3 = 1 + 3 = 4$

• نفترض أن  $u_n \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n + 3$  و نبين أن  $u_{n+1} \geq \left(\frac{9}{5}\right)^{n+1} + 3$

لدينا  $u_n \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n + 3$  إذن:  $u_n - 3 \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n$  أي

$$\frac{9}{5}(u_n - 3) \geq \left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}$$

و نعلم أن:  $u_{n+1} - 3 > \frac{9}{5}(u_n - 3)$  (حسب السؤال السابق)

إذن:  $u_{n+1} - 3 \geq \left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}$  أي:  $u_{n+1} \geq \left(\frac{9}{5}\right)^{n+1} + 3$

🌱 يجب الانتباه أثناء استعمال الطريقة الثانية، إذ يجب التحقق أن جميع أطراف المتفاوتات موجبة وأيضاً تحديد عدد

المتفاوتات لأن هذا العدد يمثل أس القوة  $\left(\frac{9}{5}\right)^n$

لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{5}\right)^n = +\infty$  (لأن:  $\frac{9}{5} > 1$ ) إذن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{5}\right)^n + 3 = +\infty$

بالتالي وحسب مصاديق التقارب فإن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  وهذا يعني أن  $u_n$  ليست متقاربة.

2

3

4

5

**تمرين 4:**  $u_0 = 1 ; u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2) ; n \geq 0$

لنبين بالترجع أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n < 4$

- بالنسبة لـ  $n=0$  العبارة صحيحة لأن:  $1 \leq u_0 < 4$  و  $u_0 = 1$
- نفترض أن  $1 \leq u_n < 4$  و نبين أن  $1 \leq u_{n+1} < 4$

$$1 \leq u_n < 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq u_n < 4 \\ 1 \leq \sqrt{u_n} < 2 \end{cases} \Rightarrow 1+1+2 \leq u_n + \sqrt{u_n} + 2 < 4+2+2$$

لدينا :

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{u_n + \sqrt{u_n} + 2}{2} < 4 \Rightarrow 2 \leq u_{n+1} < 4$$

بالتالي وحسب مبدأ الترجع فإن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n < 4$

1

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2) - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2 - 2u_n)$$

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(-u_n + \sqrt{u_n} + 2) = \frac{1}{2}(-(\sqrt{u_n})^2 + \sqrt{u_n} + 2)$$

لنعمل الحدودية:  $-t^2 + t + 2$ ، محددتها هي:  $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$

$$\text{منه: } t_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1 \text{ و } t_2 = \frac{-1-3}{-2} = 2$$

$$\text{منه: } -t^2 + t + 2 = -1(t-t_1)(t-t_2) = -(t+1)(t-2) = (t+1)(2-t)$$

$$\text{منه: } 0 < u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} + 1)(2 - \sqrt{u_n}) > 0 \text{ (لأن: } \sqrt{u_n} < 2 \text{) بالتالي: } u_n \text{ تزايدية قطعاً}$$

2

سؤال يتطلب التفكير، لأنه من الصعب التعرف على الحدودية انطلاقاً من الشكل  $-u_n + \sqrt{u_n} + 2$

لنبين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}(4 - u_n)$

المتفاوتة  $0 \leq 4 - u_{n+1}$  سبق إثباته في السؤال الأول، لدينا :

$$4 - u_{n+1} = 4 - \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2) = \frac{1}{2}(8 - u_n - \sqrt{u_n} - 2) = \frac{1}{2}(6 - u_n - \sqrt{u_n}) = \frac{1}{2}(-(\sqrt{u_n})^2 - \sqrt{u_n} + 6)$$

لنعمل الحدودية:  $-t^2 - t + 6$ ، محددتها هي:  $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25$

$$\text{منه: } t_1 = \frac{1+5}{-2} = -3 \text{ و } t_2 = \frac{1-5}{-2} = 2$$

$$\text{منه: } -t^2 - t + 6 = -1(t-t_1)(t-t_2) = -(t+3)(t-2) = (t+3)(2-t)$$

$$\text{منه: } 4 - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} + 3)(2 - \sqrt{u_n}) = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} + 3) \times \frac{(2 - \sqrt{u_n})(2 + \sqrt{u_n})}{2 + \sqrt{u_n}} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{u_n} + 3)(4 - u_n)}{2 + \sqrt{u_n}}$$

$$(4 - u_{n+1}) - \frac{2}{3}(4 - u_n) = (4 - u_n) \left[ \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{u_n} + 3)}{2 + \sqrt{u_n}} - \frac{2}{3} \right]$$

إذن :

$$(4 - u_{n+1}) - \frac{2}{3}(4 - u_n) = (4 - u_n) \left[ \frac{3\sqrt{u_n} + 9 - 8 - 4\sqrt{u_n}}{6(2 + \sqrt{u_n})} \right] = (4 - u_n) \left[ \frac{1 - \sqrt{u_n}}{6(2 + \sqrt{u_n})} \right] < 0$$

(لأن:  $1 < \sqrt{u_n}$ ) بالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}(4 - u_n)$

3

سؤال أكثر صعوبة لكونه يتطلب زيادة على التعميل استخراج التعبير  $4 - u_n$  من خلال استعمال المرافق

من أجل حساب النهاية سنوثر  $u_n$

4

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < 4 - u_1 < \frac{2}{3}(4 - u_0) \\ 0 < 4 - u_2 < \frac{2}{3}(4 - u_1) \\ \dots < \dots < \dots \\ \dots < \dots < \dots \\ 0 < 4 - u_n < \frac{2}{3}(4 - u_{n-1}) \end{array} \right. \quad \text{نعلم أن: } 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}(4 - u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{حسب السؤال السابق}) \text{ إذن:}$$

وبضرب المتفاوتات طرفاً بطرف ثم الاختزال نجد أن:  $0 < 4 - u_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n \times (4 - u_0)$

$$\text{منه: } 0 < 4 - u_n < 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n < 4 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

بما أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 4 - 0 = 4$  (لأن:  $-1 < \frac{2}{3} < 1$ ) وحسب مصاديق التقارب فإن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

🌱 لاحظ أن فكرة حل السؤال سبق التطرق لها في تمارين سابقة، هذا يعني ضرورة الاستفادة مما سبق.

$$\text{تمرين 5: } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 2}, \quad u_0 = 3; \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}; \quad n \geq 0$$

لنبين بالترجع أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$

• بالنسبة لـ  $n=0$  العبارة صحيحة لأن:  $u_0 = 3 > 2$

• نفترض أن  $u_n > 2$  ونبين أن  $u_{n+1} > 2$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - 2 = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2 = \frac{5u_n - 4 - 2u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{3u_n - 6}{u_n + 1} = \frac{3(u_n - 2)}{u_n + 1} > 0$$

بالتالي وحسب مبدأ الترجع فإن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 4}{u_n + 1} = \frac{-(u_n^2 - 4u_n + 4)}{u_n + 1} = \frac{-(u_n - 2)^2}{u_n + 1} < 0$$

بالتالي:  $(u_n)$  تناقصية.

بما أن  $(u_n)$  تناقصية و مصغورة بالعدد 2 فهي متقاربة، لتكن  $l$  نهايتها أي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

بما أن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$  فإن:  $l \geq 2$  (لا نستطيع الاستنتاج أن  $l > 2$ )

$$\text{لدينا: } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{حيث } f(x) = \frac{5x - 4}{x + 1}$$

بما أن:  $f$  متصلة على  $[2; +\infty[$  و  $[2; +\infty[ \subset [2; +\infty[$

$$( \text{لأن: } x \geq 2 \Rightarrow f(x) - 2 = \frac{5x - 4}{x + 1} - 2 = \frac{5x - 4 - 2x - 2}{x + 1} = \frac{3x - 6}{x + 1} = \frac{3(x - 2)}{x + 1} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 2 )$$

$$\text{فإن } l \text{ هو حل المعادلة: } l = f(l) \text{ منه: } l = \frac{5l - 4}{l + 1} \text{ منه: } l^2 + l = 5l - 4 \text{ منه: } l^2 - 4l + 4 = 0$$

$$\text{منه: } (l - 2)^2 = 0 \text{ بالتالي: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l = 2$$

🌱 لاحظ أن المتفاوتة  $l \geq 2$  لم تفقدنا في هذا السؤال، لكنها تكون ضرورية في حالات مشابهة لكوننا نحصل على أكثر من قيمة للعدد  $l$

	$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{5u_n - 4 - 2u_n - 2}{u_n + 1}} - \frac{1}{u_n - 2}$ <p style="text-align: right;">لدينا :</p> $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 1}{3u_n - 6} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n + 1}{3(u_n - 2)} - \frac{3}{3(u_n - 2)} = \frac{u_n - 2}{3(u_n - 2)} = \frac{1}{3}$ <p>إذن <math>v_n</math> متتالية حسابية أساسها : <math>r = \frac{1}{3}</math> وهدما الأول <math>v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{1} = 1</math></p>	أ)	4
	<p>حسب السؤال السابق لدينا : <math>v_n = v_0 + rn = 1 + \frac{1}{3}n</math></p> <p>منه : <math>v_n = \frac{1}{u_n - 2} \Rightarrow \frac{1}{v_n} = u_n - 2 \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}n} + 2</math></p>	ب)	
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}n} + 2 = 0 + 2 = 2$		5

رياضيات النجاح أذ سمير لخريسي