

سلسلة 2	الأعداد العقدية	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
<p><b>تمرين 1:</b> اكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي.</p> $z_5 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}i \quad , \quad z_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i \quad , \quad z_3 = -\sqrt{3} - i \quad , \quad z_2 = 1 - i \quad , \quad z_1 = 3 + 3i$ $z_8 = 1 - \cos(2s) + i \sin(2s) \quad , \quad z_7 = \sin(r) + i \cos(r) \quad , \quad z_6 = -\cos(r) - i \sin(r)$ <p>حيث <math>z_9 = \cos(r) + \cos(s) + i(\sin(r) + \sin(s))</math> و <math>r &gt; s</math> و <math>(r, s) \in \left] 0, \frac{f}{2} \right[</math></p>		
<p><b>تمرين 2:</b> نعتبر العددين: <math>u = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}</math></p> <p>1) احسب <math>u^2</math> ثم اكتبه على الشكل المثلثي.</p> <p>2) اكتب <math>u</math> على الشكل المثلثي.</p>		
<p><b>تمرين 3:</b> نعتبر العددين العقديين التاليين: <math>v = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}</math> ، <math>u = \frac{\sqrt{3} + i}{2}</math></p> <p>1) حدد معيار وعمدة العددين <math>u</math> و <math>v</math></p> <p>2) بين أن: <math>\left( \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} \right)^{12} = -1</math></p> <p>3) حدد قيم العدد الصحيح النسبي <math>m</math> الذي من أجله يكون <math>(\sqrt{3} + i)^m \in \mathbb{R}</math></p> <p>4) بين أن: <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\binom{n}{2}+1} \cos\left(\frac{fn}{4}\right)</math></p> <p>5) احسب المجموع: <math>S = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{2014}</math> ثم احسب: <math> S </math></p>		
<p><b>تمرين 4:</b> المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م <math>(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)</math>. حدد المجموعات التالية:</p> $F = \left\{ M(z) / \arg(z - 1 + i) \equiv \frac{f}{4} [2f] \right\} \quad \text{و} \quad E = \left\{ M(z) / \arg(z) \equiv \frac{f}{5} [2f] \right\}$ $G = \left\{ M(z) / \arg(z - 2i)^2 \equiv \frac{f}{3} [2f] \right\} \quad \text{و}$		
<p><b>تمرين 5:</b> المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م <math>(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)</math> ونعتبر العدد العقدي <math>j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}</math></p> <p>1) اكتب العدد العقدي <math>j</math> و <math>\bar{j}</math> على الشكل المثلثي</p> <p>2) نعتبر النقط <math>A(a)</math> و <math>B(b)</math> و <math>C(c)</math> حيث <math>a</math> و <math>b</math> و <math>c</math> أعداد عقدية معلومة</p> <p>بين أن المثلث <math>ABC</math> يكون متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان: <math>c - b = j(a - c)</math> أو <math>c - b = \bar{j}(a - c)</math></p> <p>3) <math>ABC</math> مثلث متساوي الأضلاع ، <math>E</math> ماثلة <math>A</math> بالنسبة لـ <math>B</math> ، <math>F</math> ماثلة <math>B</math> بالنسبة لـ <math>C</math> ، <math>G</math> ماثلة <math>C</math> بالنسبة لـ <math>A</math></p> <p>بين أن <math>EFG</math> مثلث متساوي الأضلاع.</p>		

## تمرين 1 :

$$z_1 = 3 + 3i = 3(1 + i) = 3\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 3\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{f}{4}\right) + i \sin\left(\frac{f}{4}\right) \right) = \left[ 3\sqrt{2}; \frac{f}{4} \right]$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{f}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{f}{4}\right) \right) = \left[ \sqrt{2}; -\frac{f}{4} \right]$$

$$z_3 = -\sqrt{3} - i = 2 \left( \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{7f}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7f}{6}\right) \right) = \left[ 2; \frac{7f}{6} \right]$$

$$z_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i = 2\sqrt{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{2f}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2f}{3}\right) \right) = \left[ 2\sqrt{2}; \frac{f}{3} \right]$$

$$z_5 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}i = \frac{1}{7}(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{7} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{7}; \frac{f}{4} \right]$$

$$z_6 = -\cos(r) - i \sin(r) = \cos(r + f) + i \sin(r + f) = [1; r + f]$$

$$z_7 = \sin(r) + i \cos(r) = \cos\left(\frac{f}{2} - r\right) + i \sin\left(\frac{f}{2} - r\right) = \left[ 1; \frac{f}{2} - r \right]$$

$$z_8 = 1 - \cos(2s) + i \sin(2s) = 2\sin^2(s) + 2\sin(s)\cos(s)i = 2\sin(s)(\sin(s) + i \cos(s))$$

$$z_8 = 2\sin(s) \left( \cos\left(\frac{f}{2} - s\right) + i \sin\left(\frac{f}{2} - s\right) \right) = \left[ 2\sin(s); \frac{f}{2} - s \right]$$

$$(s \in ]0, \frac{f}{2}[ \Rightarrow 2\sin(s) > 0 \text{ : لأن})$$

$$z_9 = \cos(r) + \cos(s) + i(\sin(r) + \sin(s)) = 2\cos\left(\frac{r+s}{2}\right)\cos\left(\frac{r-s}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{r+s}{2}\right)\sin\left(\frac{r-s}{2}\right)$$

$$z_9 = 2\cos\left(\frac{r+s}{2}\right) \left( \cos\left(\frac{r-s}{2}\right) + i \sin\left(\frac{r-s}{2}\right) \right) = \left[ 2\cos\left(\frac{r+s}{2}\right); \frac{r-s}{2} \right]$$

$$(r, s) \in ]0, \frac{f}{2}[^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < r < \frac{f}{2} \\ 0 < s < \frac{f}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < \frac{r+s}{2} < \frac{f}{2} \Rightarrow 2\cos\left(\frac{r+s}{2}\right) > 0 \text{ : لأن}$$

🌟 للتذكير، للحصول على الشكل المثلثي للعدد:  $z = a + ib$  نعمل بمعيار العدد  $z$  أي نكتب:  $z = r \left( \frac{a}{r} + i \frac{b}{r} \right)$

حيث  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  ثم نبحت في جدول القيم الهامة عن الزاوية  $r$  التي تحقق:  $\cos(r) = \frac{a}{r}$  و  $\sin(r) = \frac{b}{r}$

🌟 ليس من الضروري اتباع الطريقة السابقة في كل الحالات، فمثلا إن تبين لنا عامل مشترك نعمل به أولا ثم نطبق الطريقة على

العامل المحصل عليه (مثل  $z_1$  و  $z_5$ )

🌟 حالات خاصة:  $\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \quad a = [a, 0]; -a = [a, f]; ai = \left[ a, \frac{f}{2} \right]; -ai = \left[ a, -\frac{f}{2} \right]$

🌟 يمكن استعمال خاصيات الكتابة المثلثية أحيانا لتحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي، مثلا:

$$z_3 = -\sqrt{3} - i = -(\sqrt{3} + i) = -2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = [-2; f] \times \left[ 1; \frac{f}{6} \right] = [-2; f] \times \left[ 2 \times 1; f + \frac{f}{6} \right] = \left[ 2; \frac{5f}{6} \right]$$

**تمرين 2:**  $u = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$u^2 = 2 + \sqrt{3} + 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} - (2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left[4; \frac{f}{6}\right] \quad 1$$

نضع:  $u = [r, r]$  حيث:  $r \in ]-f; f]$  و  $r \in \mathbb{R}^{*+}$

$$\text{إذن: } u^2 = [r^2, 2r] \text{ منه: } \begin{cases} r^2 = 4 \\ 2r = \frac{f}{6}[2f] \end{cases} \text{ منه: } \begin{cases} r = 2 \\ r = \frac{f}{12}[f] \end{cases} \text{ منه: } \begin{cases} r = 2 \\ r = \frac{f}{12} + kf / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \in ]-f; f] \\ r = \frac{f}{12} + kf / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow -f < \frac{f}{12} + kf \leq f \Rightarrow -1 - \frac{1}{12} < k \leq 1 - \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{-13}{12} < k \leq \frac{11}{12} \quad 2$$

$$\Rightarrow (k=0 \text{ ou } k=-1) \Rightarrow \left(r = \frac{f}{12} \text{ ou } r = \frac{13f}{12}\right)$$

بما أن:  $r \cos(r) = \sqrt{2+\sqrt{3}}$  و  $r \sin(r) = \sqrt{2-\sqrt{3}}$  فإن:  $\cos(r) > 0$  و  $\sin(r) > 0$

$$\text{إذن: } r = \frac{f}{12} \text{ (لأن: } \cos\left(\frac{13f}{12}\right) < 0 \Rightarrow \frac{f}{2} < \frac{13f}{12} < \frac{3f}{2} \text{ بالتالي: } u = \left[2, \frac{f}{12}\right]$$

**تمرين 3:**  $v = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$  ،  $u = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \left[1; \frac{f}{4}\right] \text{ ، } u = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \left[1; \frac{f}{6}\right] \quad 1$$

$$\text{لدينا: } \left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right)^{12} = \left(\frac{\frac{\sqrt{3} + i}{2}}{\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}}\right)^{12} = \left(\frac{u}{v}\right)^{12} \text{ ، وبما أن: } \frac{u}{v} = \left[1; \frac{f}{6} - \frac{f}{4}\right] = \left[1; \frac{-f}{12}\right]$$

$$\text{فإن: } \left(\frac{u}{v}\right)^{12} = \left[1^{12}; 12 \times \frac{-f}{12}\right] = [1; -f] = -1 \text{ ، بالتالي: } \left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right)^{12} - 1$$

$$\text{لدينا: } (\sqrt{3} + i)^m = 2^m \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^m = 2^m \left[1; \frac{f}{6}\right]^m = 2^m \left[1; \frac{f}{6}m\right] = 2^m \left(\cos\left(\frac{f}{6}m\right) + i \sin\left(\frac{f}{6}m\right)\right) \text{ إذن:}$$

$$(\sqrt{3} + i)^m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}\left((\sqrt{3} + i)^m\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{f}{6}m\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{f}{6}m = kf / k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m = 6k / k \in \mathbb{Z} \quad 3$$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^n \left(\left(\frac{1+i}{2}\right)^n + \left(\frac{1-i}{2}\right)^n\right) = 2^n \left(\left[1; \frac{fn}{4}\right] + \left[1; \frac{-fn}{4}\right]\right) \\ = 2^n \left(\cos\left(\frac{fn}{4}\right) + i \sin\left(\frac{fn}{4}\right) + \cos\left(\frac{-fn}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-fn}{4}\right)\right) \text{ : } \forall n \in \mathbb{N} \text{ لدينا لكل} \quad 4$$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^n \times 2 \cos\left(\frac{fn}{4}\right) = 2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cos\left(\frac{fn}{4}\right)$$

$$\text{لدينا: } v = \left[1; \frac{f}{4}\right] \text{ منه: } v^4 = [1; f] = -1 \text{ ، الآن بما أن } v \neq 1 \text{ فإن:} \quad 5$$

$$S = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{2014} = 1 \times \frac{1 - v^{2015}}{1 - v} = \frac{1 - v^{2012} \times v^3}{1 - v} = \frac{1 - (v^4)^{503} \times v^3}{1 - v}$$

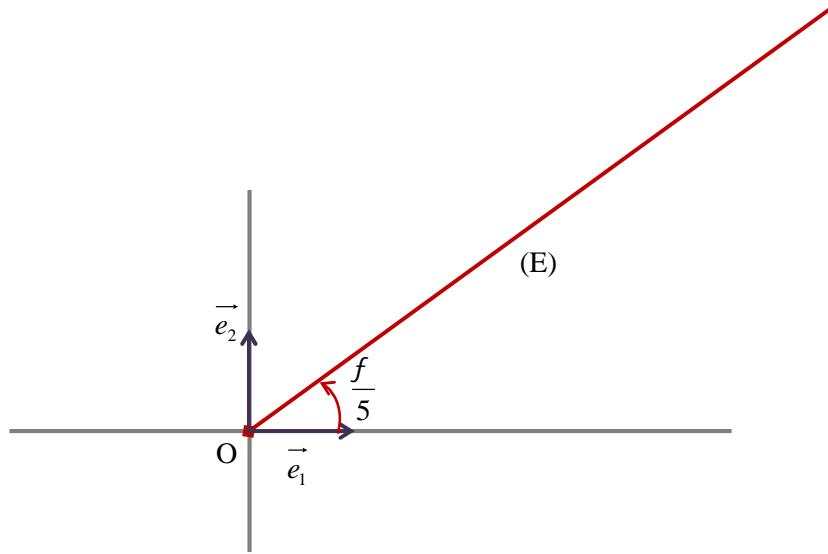
$$S = \frac{1 - (-1)^{503} \times v^3}{1 - v} = \frac{1 + v^3}{1 - v} = \frac{v + v^4}{v(1 - v)} = \frac{v - 1}{v(1 - v)} = \frac{-1}{v} = \frac{[1; f]}{\left[1; \frac{f}{4}\right]} = \left[1; \frac{3f}{4}\right] = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|S| = 1$$

**تمرين 4 :** المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$E = \left\{ M(z) / \arg(z) \equiv \frac{f}{5} [2f] \right\} = \left\{ M(z) / (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{f}{5} [2f] \right\}$$

إذن :  $E$  هي نصف المستقيم الذي أصله (والمحروم منه) والذي يكون مع  $\vec{e}_1$  الزاوية :  $\frac{f}{5}$

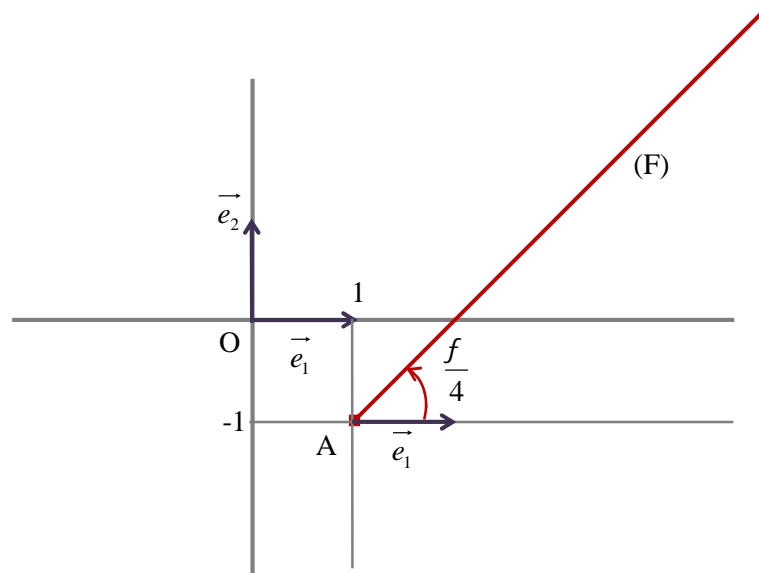


$$F = \left\{ M(z) / \arg(z - 1 + i) \equiv \frac{f}{4} [2f] \right\} = \left\{ M(z) / \arg(z - (1 - i)) \equiv \frac{f}{4} [2f] \right\}$$

نعتبر النقطة :  $A(1 - i)$ ، إذن :

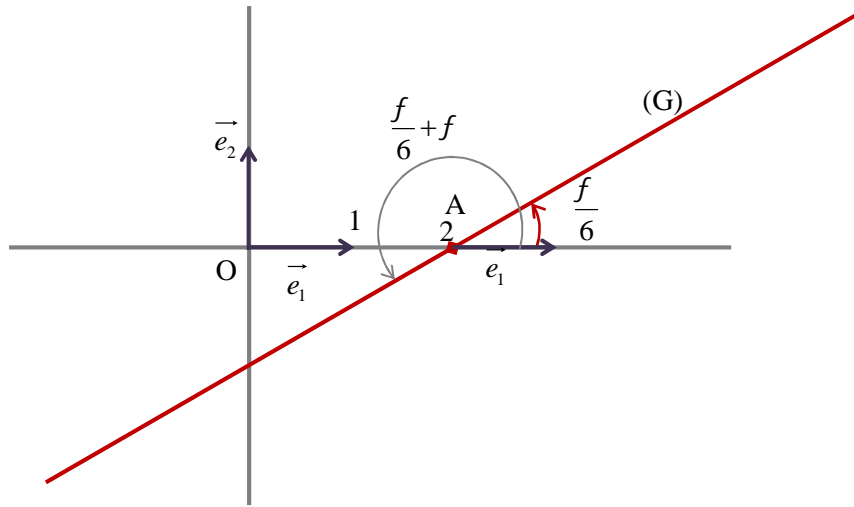
$$F = \left\{ M(z) / (\vec{e}_1, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{f}{4} [2f] \right\}$$

إذن :  $F$  هي نصف المستقيم الذي أصله  $A$  (والمحروم منه) والذي يكون مع  $\vec{e}_1$  الزاوية :  $\frac{f}{4}$



$$G = \left\{ M(z) / \arg(z-2i)^2 \equiv \frac{f}{3} [2f] \right\} = \left\{ M(z) / 2 \arg(z-2i) \equiv \frac{f}{3} [2f] \right\} = \left\{ M(z) / \arg(z-2i) \equiv \frac{f}{6} [f] \right\}$$

إذن باعتبار النقطة  $A(2i)$ ، فإننا نستنتج أن  $G$  هي المستقيم المار من  $A$  (والمحروم منها) والذي يكون مع  $\vec{e}_1$  الزاوية:  $\frac{f}{6}$



**تمرين 5:** المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  ،  $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\bar{j} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1; \frac{4f}{3}\right] , \quad j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1; \frac{2f}{3}\right] \quad 1$$

المثلث  $ABC$  متساوي الأضلاع يعني:  $AC = BC$  و  $\hat{ACB} = \frac{f}{3}$  حيث  $A(a)$  و  $B(b)$  و  $C(c)$  أعداد عقدية معلومة

يعني:  $AC = BC$  و  $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{f}{3} [2f]$  أو  $AC = BC$  و  $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{-f}{3} [2f]$

$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \frac{-f}{3} [2f] \text{ و } |c-a| = |c-b| \text{ أو } \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \frac{f}{3} [2f] \text{ و } |c-a| = |c-b| \text{ يعني:}$$

$$\arg\left(-\left(\frac{c-b}{a-c}\right)\right) = \frac{-f}{3} [2f] \text{ و } \left|\frac{c-b}{a-c}\right| = 1 \text{ أو } \arg\left(-\left(\frac{c-b}{a-c}\right)\right) = \frac{f}{3} [2f] \text{ و } \left|\frac{c-b}{a-c}\right| = 1 \text{ يعني:}$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right) - f = \frac{-f}{3} [2f] \text{ و } \left|\frac{c-b}{a-c}\right| = 1 \text{ أو } \arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right) - f = \frac{f}{3} [2f] \text{ و } \left|\frac{c-b}{a-c}\right| = 1 \text{ يعني:}$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right) = \frac{2f}{3} [2f] \text{ و } \left|\frac{c-b}{a-c}\right| = 1 \text{ أو } \arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right) = \frac{4f}{3} [2f] \text{ و } \left|\frac{c-b}{a-c}\right| = 1 \text{ يعني:}$$

$$c-b = \bar{j}(a-c) \text{ أو } c-b = j(a-c) \text{ يعني: } \frac{c-b}{a-c} = \bar{j} \text{ أو } \frac{c-b}{a-c} = j$$

للتذكير، يكون مثلث متساوي الأضلاع إذا فقط إذا كانت إحدى العبارات التالية صحيحة:

1) جميع أضلاعه متقايسة (2) جميع زواياه متقايسة (3) يوجد ضلعان متقايسان والزاوية المحصورة بينهما قياسها  $60^\circ$

$$\arg(-z) = \arg(-1 \times z) = \arg(-1) + \arg(z) = f + \arg(z)$$

$$\arg(-z) = \arg\left(\frac{z}{-1}\right) = \arg(z) - \arg(-1) = \arg(z) - f$$

نعتبر في المستوى العقدي:  $A(a)$  و  $B(b)$  و  $C(c)$  و  $E(e)$  و  $F(f)$  و  $G(g)$  حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $e$  و  $f$  و  $g$  أعداد عقدية .

لدينا  $E$  مماثلة  $A$  بالنسبة لـ  $B$  إذن  $A$  منتصف  $[BE]$  منه :  $a = \frac{e+b}{2}$  منه :  $e = 2a - b$

لدينا  $F$  مماثلة  $B$  بالنسبة لـ  $C$  إذن  $B$  منتصف  $[CF]$  منه :  $b = \frac{f+c}{2}$  منه :  $f = 2b - c$

لدينا  $G$  مماثلة  $C$  بالنسبة لـ  $A$  إذن  $C$  منتصف  $[AG]$  منه :  $c = \frac{g+a}{2}$  منه :  $g = 2c - a$

بما أن  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع فإن :  $c - b = j(a - c)$  أو  $c - b = \bar{j}(a - c)$

▪ إذا كان :  $c - b = j(a - c)$  ، منه :  $b = c - j(a - c) = (1 + j)c - ja$

$$\frac{g - f}{e - g} = \frac{2c - a - 2b + c}{2a - b - 2c + a} = \frac{2(c - b) + (c - a)}{3a - 3c - b + c} = \frac{2j(a - c) + (c - a)}{3(a - c) + (c - b)} = \frac{(a - c)(2j - 1)}{3(a - c) + j(a - c)}$$

$$\frac{g - f}{e - g} = \frac{(a - c)(2j - 1)}{(a - c)(3 + j)} = \frac{2j - 1}{3 + j}$$

3

وحيث أن :  $j^2 + j + 1 = 0$  (راجع التمرين 3 من السلسلة 1) فإن :  $j(3 + j) = 3j + j^2 = 3j - j - 1 = 2j - 1$

$$\frac{g - f}{e - g} = j \quad \text{إذن} \quad \frac{2j - 1}{3 + j} = j$$

▪ إذا كان :  $c - b = \bar{j}(a - c)$  ، منه :  $b = c - \bar{j}(a - c) = (1 + \bar{j})c - \bar{j}a$

$$\frac{g - f}{e - g} = \frac{2c - a - 2b + c}{2a - b - 2c + a} = \frac{2(c - b) + (c - a)}{3a - 3c - b + c} = \frac{2\bar{j}(a - c) + (c - a)}{3(a - c) + (c - b)} = \frac{(a - c)(2\bar{j} - 1)}{3(a - c) + \bar{j}(a - c)}$$

$$\frac{g - f}{e - g} = \frac{(a - c)(2\bar{j} - 1)}{(a - c)(3 + \bar{j})} = \left( \frac{2\bar{j} - 1}{3 + \bar{j}} \right) = \bar{j}$$

في جميع الحالات نجد أن :  $\frac{g - f}{e - g} = j$  أو  $\frac{g - f}{e - g} = \bar{j}$  ، بالتالي  $EFG$  هو أيضا مثلث متساوي الأضلاع.

التمرين رغم أنه يبدو صعبا لكنه مثال جيد لتوضيح أهمية الأعداد العقدية في حل كثير من المسائل الهندسية في أسطر قليلة، كما يوضح أهمية العدد  $j$  الذي أدرجنا بعض خواصه في تمرين سابق والتي من المستحسن حفظها واستعمالها عند الحاجة.