

سلسلة 2	الحسابيات	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
	<p>تمرين 1: a و b و c أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. (الأسئلة مستقلة)</p> <p>(1) بين أن: $(a \wedge b) + (a \vee b) = a + b \Leftrightarrow a/b \text{ ou } b/a$</p> <p>(2) بين أن: $(a^2 + ab + b^2) \wedge ab = 1 \Leftrightarrow a \wedge b = 1$</p> <p>(3) بين أن: $c/(a \wedge c)(b \wedge c) \Leftrightarrow c/ab$</p> <p>(4) بين أن: $(a^2 - b^2) \wedge (a^3 - b^3) = (a - b)$ (حيث $a > b$)</p>	
	<p>تمرين 2: n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.</p> <p>(1) بين أن: $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2 \quad 15 / ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$</p> <p>(2) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 42 / n^7 - n$</p> <p>(3) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9 / 4^n + 6n + 8$</p> <p>(4) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 6^n \equiv 1 + 5n [25]$</p>	
	<p>تمرين 3: a و b و c و d أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.</p> <p>بين أن: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0 [30]$</p>	
	<p>تمرين 4: p عدد أولي أكبر من 2 و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم. (السؤالان مستقلان)</p> <p>(1) بين أن: $(n+1)^p \equiv n^p + 1 [2p]$</p> <p>(2) بين أن: $n^{p^2} \equiv n^p [p^2]$</p>	
	<p>تمرين 5: n عدد صحيح طبيعي أكبر من 1. (السؤالان مستقلان)</p> <p>(1) بين أن العدد: $A_n = n^4 + n^2 + 1$ غير أولي.</p> <p>(2) بين أن التفكيك الأولي للعدد A_n لا يحتوي على العدد 2</p> <p>(3) بين أن: $n \wedge 3 = 1 \Rightarrow 3 / A_n$</p>	
	<p>تمرين 6: a و b و x أعداد من \mathbb{N}^* حيث $x > 1$، نضع: $a \wedge b = d$</p> <p>(1) بين أن: $(x^d - 1) / (x^a - 1) \wedge (x^b - 1)$</p> <p>(2) نعتبر المعادلة: $(E) \quad ax + by = d$</p> <p>أ) بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x_0, y_0) في \mathbb{Z}^2</p> <p>ب) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E)</p> <p>ج) استنتج أن: $\exists (u, v) \in \mathbb{N}^2 \quad / \quad au - bv = d$</p> <p>د) تحقق أن: $(x^{au} - 1) - (x^{bv} - 1)x^d = (x^d - 1)$</p> <p>(3) استنتج مما سبق أن: $(x^a - 1) \wedge (x^b - 1) = (x^{a \wedge b} - 1)$</p>	

سلسلة 2	الحسابيات حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
تمرين 1: a و b و c أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. (الأسئلة مستقلة)		
1	<p style="text-align: center;">$\exists (r, s) \in \mathbb{N}^2 / \begin{cases} a = dr \\ b = ds \\ r \wedge s = 1 \end{cases}$ نضع: $d = a \wedge b$ منه:</p> <p>و حيث أن: $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$ فإن: $d(a \vee b) = d^2 r s$ منه: $a \vee b = d r s$ ، الآن، لدينا:</p> $(a \wedge b) + (a \vee b) = a + b \Leftrightarrow d + d r s = dr + ds \Leftrightarrow 1 + r s = r + s \Leftrightarrow 1 - r + s(r - 1) = 0$ $(a \wedge b) + (a \vee b) = a + b \Leftrightarrow (r - 1)(s - 1) = 0 \Leftrightarrow (r = 1) \text{ ou } (s = 1) \Leftrightarrow (a/b) \text{ ou } (b/a)$	
2	<p>▪ نفرض أن: $(a^2 + ab + b^2) \wedge ab = 1$ ، نضع: $a \wedge b = d$ منه:</p> $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/ab \\ d/b^2 \\ d/a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/ab \\ d/a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow d/(a^2 + ab + b^2) \wedge (ab) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$ <p>▪ نفرض الآن أن: $a \wedge b = 1$ ، إذن: $a^2 \wedge b = 1$ و $a \wedge b^2 = 1$ نضع: $(a^2 + ab + b^2) \wedge a = d$ منه:</p> $\begin{cases} d/a \\ d/a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/a(a+b) \\ d/a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/b^2 \end{cases} \Rightarrow d/a \wedge b^2 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$ <p>وبنفس الطريقة نبين أن: $(a^2 + ab + b^2) \wedge b = 1$</p> <p>الآن: $\begin{cases} (a^2 + ab + b^2) \wedge a = 1 \\ (a^2 + ab + b^2) \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow (a^2 + ab + b^2) \wedge ab = 1$</p> <p>خلاصة: $(a^2 + ab + b^2) \wedge ab = 1 \Leftrightarrow a \wedge b = 1$</p>	2
<p style="text-align: center;">$x \wedge yz = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \wedge y = 1 \\ x \wedge z = 1 \end{cases}$ و $x^n \wedge y^m = 1 \Leftrightarrow x \wedge y = 1$ للتذكير: 🍌</p> <p>🍌 هناك طرق أخرى لحل هذا التمرين (على الأقل أعرف طريقتين)، لكننا فضلنا إدراج الطريقة التي يمكن تعميمها على أسئلة مشابهة.</p>		
3	<p>▪ بداية نعلم أن: $(a \wedge c)/a$ و $(b \wedge c)/b$ منه: $(a \wedge c)(b \wedge c)/ab$ ، إذن: $c/(a \wedge c)(b \wedge c) \Rightarrow c/ab$</p> <p>▪ من جهة أخرى، نضع: $d = a \wedge c$ منه: $\exists (r, \{) \in \mathbb{N}^2 / \begin{cases} a = dr \\ c = d\{ \\ r \wedge \{ = 1 \end{cases}$</p> <p>بين أن: $c/ab \Rightarrow d\{ / dr b \Rightarrow \begin{cases} \{ / r b \\ r \wedge \{ = 1 \end{cases} \Rightarrow \{ / b \Rightarrow \{ d / bd \Rightarrow c/b(a \wedge c)$</p> <p>مرة أخرى نضع: $u = b \wedge c$ منه: $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 / \begin{cases} b = u p \\ c = u q \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$</p> <p>$c/b(a \wedge c) \Rightarrow u q / u p (a \wedge c) \Rightarrow \begin{cases} q/p (a \wedge c) \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Rightarrow q/(a \wedge c) \Rightarrow u q / u (a \wedge c) \Rightarrow c/(b \wedge c)(a \wedge c)$</p>	3

نفرض أن : $a \wedge b = 1$ ، إذن : $a^2 \wedge b^2 = 1$ ، لدينا إذن:
 $(a^2 - b^2) \wedge (a^3 - b^3) = (a - b)(a + b) \wedge (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b) \left((a + b) \wedge (a^2 + ab + b^2) \right)$
 نضع : $(a + b) \wedge (a^2 + ab + b^2) = d$ ، إذن :

$$\begin{cases} d/a + b \\ d/a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^2 + ab \\ d/ab + b^2 \\ d/a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^2 \\ d/b^2 \end{cases} \Rightarrow d/a^2 \wedge b^2 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$$

بالتالي : $(a^2 - b^2) \wedge (a^3 - b^3) = a - b$

4

تمرين 2 : عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

لدينا : $A = ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^3b - ab^3)(a^2 + b^2)$
 لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases} a^3 \equiv a[3] \\ b^3 \equiv b[3] \end{cases}$: منه $\begin{cases} ba^3 \equiv ab[3] \\ ab^3 \equiv ab[3] \end{cases}$: منه $ba^3 - ab^3 \equiv 0[3]$: منه $A \equiv 0[3]$
 لدينا من جهة أخرى : $A = ab(a^4 - b^4) = a^5b - ab^5$
 لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases} a^5 \equiv a[5] \\ b^5 \equiv b[5] \end{cases}$: منه $\begin{cases} ba^5 \equiv ab[5] \\ ab^5 \equiv ab[5] \end{cases}$: منه $ba^5 - ab^5 \equiv 0[5]$: منه $A \equiv 0[5]$
 إذن : $3/A$ و $5/A$ ، وبما أن : $3 \wedge 5 = 1$ فإن : $15/A$ ، بالتالي : $15/ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

1

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n^7 \equiv n[7]$

$$n^7 \equiv n[3] : \text{ منه } \begin{cases} n^7 \equiv n^3[3] \\ n^3 \equiv n[3] \end{cases} : \text{ منه } n^6 \equiv n^2[3] : \text{ منه } n^3 \equiv n[3]$$

$$n^7 \equiv n^4 \equiv n^2 \equiv n[2] : \text{ منه } n^6 \equiv n^3[2] : \text{ منه } n^2 \equiv n[2]$$

بما أن 2 و 3 و 7 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن : $42/n^7 - n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

بالنسبة للعدد 2 يمكن دراسة حالات الزوجية فقط دون الحاجة لمبرهنة فيرما.

2

لدينا :

$$4^n + 6n + 8 = 4^n - 1 + 6n + 9 = 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1) + 6n + 9 = 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1 + 2n + 3)$$

$$1 \equiv 1[3]$$

$$4 \equiv 1[3]$$

$$4^2 \equiv 1[3]$$

$$\dots \equiv \dots[3]$$

$$4^{n-1} \equiv 1[3]$$

$$4^n \equiv 1[3]$$

$$4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1 + 2n + 3 \equiv 3k / k \in \mathbb{N} : \text{ إذن } , 4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1 + 2n + 3 \equiv 3n + 3 \equiv 0[3]$$

منه : $4^n + 6n + 8 = 9k$ ، بالتالي : بين أن : $9/4^n + 6n + 8$

3

لدينا : $6^n - 1 - 5n = 5(6^{n-1} + 6^{n-2} + \dots + 6 + 1 - n)$

وبنفس طريقة السؤال السابق نبين أن : $(6^{n-1} + 6^{n-2} + \dots + 6 + 1) - n \equiv n - n \equiv 0[5]$
 منه : $6^n \equiv 1 + 5n[25]$ / $k \in \mathbb{N}$: بين أن : بالتالي :

4

تمرين 3 : a و b و c و d أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

■ إذا كان a زوجي فإن : a^{4b+d} و a^{4c+d} زوجيان ، وإذا كان a فردي فإن : a^{4b+d} و a^{4c+d} فرديان
 في كلا الحالتين $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[2]$: منه ، زوجي ، منه : $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[2]$
 ■ إذا كان $a \equiv 0[3]$ فإن : $a^{4b+d} \equiv 0[3]$ و $a^{4c+d} \equiv 0[3]$: منه $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[3]$

في الحالة الأخرى نستنتج أن: $3 \wedge a = 1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^2 \equiv 1[3]$ منه: $a^{4b} \equiv 1[3]$ و $a^{4c} \equiv 1[3]$
 منه: $a^{4b} \equiv a^{4c} [3]$ منه: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[3]$ ، في كل الحالات نجد أن: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[3]$
 ■ إذا كان $a \equiv 0[5]$ فإن: $a^{4b+d} \equiv 0[5]$ و $a^{4c+d} \equiv 0[5]$ منه: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[5]$
 في الحالة الأخرى نستنتج أن: $5 \wedge a = 1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^4 \equiv 1[5]$ منه: $a^{4b} \equiv 1[5]$ و $a^{4c} \equiv 1[5]$
 منه: $a^{4b} \equiv a^{4c} [5]$ منه: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[5]$ ، في كل الحالات نجد أن: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[5]$
 بما أن 2 و 3 و 5 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[30]$

تمرين 4: p عدد أولي أكبر من 2 و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم. (السؤالان مستقلان)

بدراسة زوجية العدد n نستنتج بسهولة أن: $(n+1)^p \equiv n^p + 1 [2]$

من جهة أخرى و حسب مبرهنة فيرما $\begin{cases} (n+1)^p \equiv n+1 [p] \\ n^p \equiv n [p] \end{cases}$ منه: $(n+1)^p - n^p \equiv 1 [p]$

أي: $(n+1)^p \equiv n^p + 1 [p]$

وبما أن p عدد أولي أكبر من 2 فإن: $p \wedge 2 = 1$ بالتالي: $(n+1)^p \equiv n^p + 1 [2p]$

لدينا $p > 2$ منه: $p^2 - p > 0$ ، منه: $n^{p^2} - n^p = n^p (n^{p^2-p} - 1)$

■ إذا كان: $n \equiv 0 [p]$ فإن: $n^2 \equiv 0 [p^2]$ منه: $n^{p^2} - n^p = n^2 n^{p^2-2} (n^{p^2-p} - 1) \equiv 0 [p^2]$

■ في الحالة الأخرى يكون لدينا: $n \wedge p = 1$ ، إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $n^p \equiv 1 [p]$

منه: $n^{p^2-p} - 1 = (n^p)^{p-1} - 1 = (n^p - 1) [(n^p)^{p-2} + (n^p)^{p-3} + \dots + n^p + 1]$

من $n^p \equiv 1 [p]$ نستنتج أن: $(n^p)^{p-2} + (n^p)^{p-3} + \dots + n^p + 1 \equiv p \equiv 0 [p]$

إذن: $(n^p)^{p-2} + (n^p)^{p-3} + \dots + n^p + 1 \equiv s \ p/s \in \mathbb{N}$ و $n^p - 1 = p r \ r \in \mathbb{N}$

منه: $n^{p^2} - n^p = n^p r s \ p^2$ ، منه: بين أن: $n^{p^2} \equiv n^p [p^2]$

في جميع الحالات نستنتج أن: $n^{p^2} \equiv n^p [p^2]$

تمرين 5: n عدد صحيح طبيعي أكبر من 1.

لدينا: $A_n = n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$

وبما أن: $n^2 + n + 1 > 1$ و $n^2 - n + 1 > 1$ ، إذن A_n غير أولي.

بدراسة زوجية العدد n نستنتج أن $n^4 + n^2$ زوجي، إذن A_n عدد فردي

ما يعني أن التفكيك الأولي للعدد A_n لا يحتوي على العدد 2

بين أن: $n \wedge 3 = 1 \Rightarrow 3/A_n$

لدينا حسب مبرهنة فيرما: $n \wedge 3 = 1 \Rightarrow n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n^4 \equiv 1[3] \Rightarrow n^4 + n^2 + 1 \equiv 3 \equiv 0[3] \Rightarrow 3/A_n$

تمرين 6: a و b و x أعداد من \mathbb{N}^* حيث $x > 1$ ، نضع: $a \wedge b = d$

لدينا: $a \wedge b = d$ $\begin{cases} a = d r \\ b = d s \\ r \wedge s = 1 \end{cases}$ $\exists (r, s) \in \mathbb{N}^2 /$

ولدينا : $x^d \equiv 1 [x^d - 1]$ ، منه : $\begin{cases} x^{r^d} \equiv 1 [x^d - 1] \\ x^{s^d} \equiv 1 [x^d - 1] \end{cases}$: منه : $\begin{cases} x^{r^d} - 1 \equiv 0 [x^d - 1] \\ x^{s^d} - 1 \equiv 0 [x^d - 1] \end{cases}$: منه : $\begin{cases} x^d - 1/x^{r^d} - 1 \\ x^d - 1/x^{s^d} - 1 \end{cases}$ إذن : $(x^d - 1)/(x^a - 1) \wedge (x^b - 1)$

$$(E) \quad ax + by = d$$

لدينا : $r \wedge s = 1$ إذن حسب مبرهنة Bezout فإن : $\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2 / r x_0 + s y_0 = 1$

أ) منه : $rd x_0 + sd y_0 = d$ أي : $ax_0 + by_0 = d$

ما يعني أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x_0, y_0) في \mathbb{Z}^2

$$(E) \Leftrightarrow r x + s y = 1 \Leftrightarrow r x + s y = r x_0 + s y_0 \Leftrightarrow r (x - x_0) = s (y_0 - y)$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = s k \\ y_0 - y = r k \end{cases} / k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s k + x_0 \\ y = y_0 - r k \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

ب) بالتالي : $S = \{(s k + x_0, y_0 - r k) / k \in \mathbb{Z}\}$

لنبحث عن إمكانية إيجاد زوج (x, y) من مجموعة الحلول السابقة حيث يكون : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s k + x_0 \geq 0 \\ y_0 - r k \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{-x_0}{s} \\ k \geq \frac{y_0}{r} \end{cases} \text{ لدينا :}$$

$$\text{إذن يكفي أن نأخذ : } k = k_0 = \text{Max} \left(E \left(\frac{-x_0}{s} \right); E \left(\frac{y_0}{r} \right) \right) + 1$$

مما يعني صحة العبارة : $\exists (u, v) \in \mathbb{N}^2 / au - bv = d$ حيث : $u = s k_0 + x_0$ و

$$v = -(y_0 - r k_0) = r k_0 - y_0$$

د) لدينا : $(x^{au} - 1) - (x^{bv} - 1)x^d = x^{au} - 1 - x^{bv+d} + x^d = x^{au} - 1 - x^{au} + x^d = x^d - 1$

لدينا من جهة حسب السؤال الأول : (1) $(x^d - 1)/(x^a - 1) \wedge (x^b - 1)$

و من جهة أخرى : $\begin{cases} x^a \equiv 1 [x^a - 1] \\ x^b \equiv 1 [x^b - 1] \end{cases}$: منه : $\begin{cases} x^{au} \equiv 1 [x^a - 1] \\ x^{bv} \equiv 1 [x^b - 1] \end{cases}$: منه : $\begin{cases} x^a - 1/x^{au} - 1 \\ x^b - 1/x^{bv} - 1 \end{cases}$

وحيث أن : $(x^d - 1)/(x^a - 1) \wedge (x^b - 1)$ فإن : $\begin{cases} (x^a - 1) \wedge (x^b - 1)/x^{au} - 1 \\ (x^a - 1) \wedge (x^b - 1)/x^{bv} - 1 \end{cases}$: منه : $\begin{cases} (x^a - 1) \wedge (x^b - 1)/x^a - 1 \\ (x^a - 1) \wedge (x^b - 1)/x^b - 1 \end{cases}$

منه : $(x^a - 1) \wedge (x^b - 1)/(x^{au} - 1) - (x^{bv} - 1)x^d$ أي : $(x^a - 1) \wedge (x^b - 1)/x^d - 1$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(x^a - 1) \wedge (x^b - 1) = (x^{a \wedge b} - 1)$