الدوال اللوغاريتمية

تمرين 1

حل في $\mathbb{R}$:

-1 $\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln(x^2+2x-15)$

-2 $\ln|x+2|+\ln|x+3|=\ln|x^2+2x-15|$

-3 $\ln\left((x+2)(x+3)\right)=\ln(x^2+2x-15)$

-4 $\ln^2 x-7\ln x+6=0$

-5 $\ln\sqrt{x+4}-\ln\sqrt{x-1}=\ln\sqrt{x}$

الحل

-1 $(E_1)\quad \ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln(x^2+2x-15)$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D=]3;+\infty[$

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow \ln\left((x+2)(x+3)\right)=\ln(x^2+2x-15)\\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3)=x^2+2x-15\\ &\Leftrightarrow x=-7\end{aligned}$$

$-7\notin D$ **إذن :** $\boxed{S=\varnothing}$

-2 $(E_2)\quad \ln|x+2|+\ln|x+3|=\ln|x^2+2x-15|$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D=\mathbb{R}-\{-5;-3;-2;3\}$

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow \ln\left(|x+2||x+3|\right)=\ln|x^2+2x-15|\\ &\Leftrightarrow |(x+2)(x+3)|=|x^2+2x-15|\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+5x+6=x^2+2x-15\\ ou\\ x^2+5x+6=-x^2-2x+15\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=-7\\ ou\\ x=-\dfrac{9}{2}\ ou\ x=1\end{cases}\end{aligned}$$

$$\boxed{S=\left\{-7;-\frac{9}{2};1\right\}}$$

-3 $(E_3)\quad \ln\left((x+2)(x+3)\right)=\ln(x^2+2x-15)$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D=]-\infty;-5[\cup]3;+\infty[$

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow \ln\left((x+2)(x+3)\right)=\ln(x^2+2x-15)\\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3)=x^2+2x-15\\ &\Leftrightarrow x=-7\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{S=\{-7\}}$

-4 $(E_4)\quad \ln^2 x-7\ln x+6=0$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D=]0;+\infty[$

$$\begin{aligned}(E_4) &\Leftrightarrow \ln^2 x-7\ln x+6=0\\ &\Leftrightarrow \ln x=1\ ou\ \ln x=6\\ &\Leftrightarrow x=e\ ou\ \ln\sqrt[6]{x}=1\\ &\Leftrightarrow x=e\ ou\ x=e^6\end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{e;e^6\}}$$

تمرين2

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات :

-1 $\ln(x-1)\le 0$

-2 $\ln(x-1)-\ln(2x-4)>0$

-3 $\ln\dfrac{3x-1}{x-1} \geq 0$

الحل

-1 $(I_1) \quad \ln(x-1) \leq 0$

مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D =]1;+\infty[$

$$\begin{aligned}(I_1) &\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq 0\\ &\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq \ln 1\\ &\Leftrightarrow x-1 \leq 1\\ &\Leftrightarrow x \leq 2\end{aligned}$$

$$\boxed{S =]1;2]}$$

-2 $(I_2) \quad \ln(x-1) - \ln(2x-4) > 0$

مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D =]2;+\infty[$

$$\begin{aligned}(I_2) &\Leftrightarrow \ln(x-1) - \ln(2x-4) > 0\\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x-4}{2x-4}\right) > \ln 1\\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-4} > 1\\ &\Leftrightarrow x-1 > 2x-4\\ &\Leftrightarrow x < 3\end{aligned}$$

$$S =]2;3[$$

-3 $(I_3) \quad \ln\dfrac{3x-1}{x-1} \geq 0$

مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\cup]1;+\infty[$

$$\begin{aligned}(I_3) &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x-4}{2x-4}\right) > 0\\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x-4}{2x-4}\right) > \ln 1\\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-4} > 1\\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-4} - 1 > 0\\ &\Leftrightarrow \frac{-x+3}{2x-4} > 0\end{aligned}$$

$$S =]2;3[\cap \left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\cup]1;+\infty[\right)$$

$$\boxed{S =]2;3[}$$

تمرين3

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية :

-1 $\begin{cases}\ln(x) - \ln(y) = 1\\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = 13\end{cases}$

-2 $\begin{cases}3\ln(x^5) + \ln\left(\sqrt{\frac{1}{y}}\right) = 6\\ \ln\left(\frac{1}{x^8}\right) + \ln(\sqrt[3]{y}) = 1\end{cases}$

-3 $\begin{cases}\ln(xy^2\sqrt{x}) = 10\\ \ln\left(\frac{x}{y\sqrt{y}}\right) = 1\end{cases}$

الحل

-1 $(S_1) \quad \begin{cases}\ln(x) - \ln(y) = 1\\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = 13\end{cases}$

مجموعة تعريف النظمة هي : $D = \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$

$$\begin{aligned}(S_1) &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x) - \ln(y) = 1\\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = 13\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x) - \ln(y) = 1\\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = 13\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x) - \ln(y) = 1\\ \ln(x)\ln(y) = 6\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_1) &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x) - \ln(y) = 1\\ \ln(x)\ln(y) = 6\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x) - \ln(y) = 1\\ (\ln(x))^2 - \ln(x) - 6 = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(y) = \ln(x) - 1\\ \ln(x) = -2 \ ou \ \ln(x) = 3\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_1) &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(y) = -3\\ \ln(x) = -2\end{cases} \ ou \ \begin{cases}\ln(y) = 2\\ \ln(x) = 3\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln\left(\sqrt[3]{\frac{1}{y}}\right) = 1\\ \ln\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right) = 1\end{cases} \ ou \ \begin{cases}\ln(\sqrt{y}) = 1\\ \ln(\sqrt[3]{x}) = 1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}y = e^{-3}\\ x = e^{-2}\end{cases} \ ou \ \begin{cases}y = e^2\\ x = e^3\end{cases}\end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left\{(e^{-2};e^{-3});(e^3;e^2)\right\}}$$

-2
$$(S_1)\quad \begin{cases} 3\ln(x^5)+\ln\left(\sqrt{\frac{1}{y}}\right)=6 \\ \ln\left(\frac{1}{x^8}\right)+\ln(\sqrt[3]{y})=1 \end{cases}$$

مجموعة تعريف النظمة هي : $D=\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}^{*+}$

$$(S_1)\Leftrightarrow \begin{cases} 3\ln(x^5)+\ln\left(\sqrt{\frac{1}{y}}\right)=6 \\ \ln\left(\frac{1}{x^8}\right)+\ln(\sqrt[3]{y})=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(y)=6 \\ -8\ln(x)+\frac{1}{3}\ln(y)=1 \end{cases}$$

$$(S_1)\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x)=\frac{5}{2} \\ \ln(y)=63 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=e^{\frac{5}{2}} \\ y=e^{63} \end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(e^{\frac{5}{2}};e^{63}\right)\right\}}$$

تمرين4

a وb عددان حقيقيان موجبان قطعا

بحيث : $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\ln\sqrt[6]{a}+\ln\sqrt[6]{b}$

بين أن : $\frac{a}{b}+2=3\sqrt{\frac{a}{b}}$

الحل

$$(E)\quad \frac{1}{3}\ln\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\ln\sqrt[6]{a}+\ln\sqrt[6]{b}$$

$$(E)\Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\ln\sqrt[6]{a}+\ln\sqrt[6]{b}\ \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt[6]{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2}\right)=\ln\sqrt[6]{ab}$$

$$(E)\Leftrightarrow \left(\frac{a+2b}{3}\right)^2=ab$$

$$\Leftrightarrow a+2b=3\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+2b}{b}=\frac{3\sqrt{ab}}{b}$$

$$\boxed{(E)\Leftrightarrow \frac{a}{b}+2=3\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

تمرين5

احسب النهايات التالية :

-1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^5}{x^2}=$

-2 $\lim\limits_{x\to0^+}x^3(\ln x)^2$

-3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}}$

-4 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}}$

-5 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\ln(x^2+1))$

الحل

-1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^5}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^5}{\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^5}$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{2}{5}}}\right)^5$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^5}{x^2}=0}$$

-2

$$\lim_{x\to0^+}x^3(\ln x)^2=\lim_{x\to0^+}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2(\ln x)^2$$

$$\lim_{x\to0^+}x^3(\ln x)^2=\left(\lim_{x\to0^+}x^{\frac{3}{2}}\ln x\right)^2$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}x^3(\ln x)^2=0}$$

-3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}}=0\times1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}}=0}$$

-4

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(2x+1)}{2x}\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(t+1)}{t}\lim_{x\to0^+}2\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}}=1\times0$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}}=0}$$

-5

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\ln(x^2+1))=\lim_{x\to+\infty}(\ln(x^2+1)-x)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}-\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x+\ln(x^2+1))=+\infty(0-1)$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(x+\ln(x^2+1))=-\infty}$$

تمرين6

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;0[$ بما يلي :

$$g(x)=x+1+\ln(-x)$$

بين أن : $\forall x\in]-\infty;0[\ :\ g(x)\le0$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases}f(x)=x^2+2x\ln(-x) & x\in]-\infty;0[\\ f(0)=0\end{cases}$$

1- بين أن : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2- أ- بين أن : f متصلة في 0

3- بين أن : $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$

أول النتيجة هندسيا .

4- ادرس رتابة f

5- بين أن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

أول النتيجة هندسيا .

6- أ- بين أن (C_f) يقبل النقطة ذات الأفصول -1 نقطة انعطاف

ب- حدد معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الأفصول -1

7- ضع جدول تغيرات f ثم أنشئ التمثيل المبياني ل f على معلم متعامد ممنظم

الحل

I - نعتبر x من $]-\infty;0[$

$$g(x)=x+1+\ln(-x)$$

$$g'(x)=\frac{x+1}{x}$$

x	$-\infty$	-1	0
$g(x)$	↗	$g(-1)$	↘

من جدول التغيرات نستنتج :

$$\forall x\in]-\infty;0[\ :\ g(x)\le g(-1)$$

بما أن : $g(-1)=0$

فإن : $\boxed{\forall x\in]-\infty;0[\ :\ g(x)\le0}$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases}f(x)=x^2+2x\ln(-x) & x\in]-\infty;0[\\ f(0)=0\end{cases}$$

-1

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2+2x\ln(-x)$$
$$=\lim_{t\to+\infty}t^2-2t\ln(t)$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to+\infty}t^2\left(1-2\frac{\ln(t)}{t}\right)$$

بما أن : $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$ فإن

: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty(1-0)$

إذن: $\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$

-2 أ-

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x^2+2x\ln(-x)$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{t\to0^+}t^2-2t\ln(t)$$

بما أن : $\lim_{t\to0^+}t\ln(t)=0$ فإن :

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=0-0$$

و منه : $\boxed{\lim_{x\to0^-}f(x)=0}$

و لدينا : $f(0)=0$

إذن: $\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)$

إذن: $\boxed{f \text{ متصلة في } 0}$

-3 $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+2x\ln(-x)}{x}$

$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}x+2\ln(-x)$

$=0-\infty$

إذن: $\boxed{\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty}$

و منه : (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى يسار النقطة ذات الأفصول 0

-4 رتابة f

$f'(x)=2g(x) \qquad x\in\left]-\infty;0\right[$

بما أن : $\forall x\in\left]-\infty;0\right[\ : g(x)\le 0$

فأن : f تناقصية على المجال $\left]-\infty;0\right[$

-5 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x\ln(-x)}{x}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}x+2\ln(-x)$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}-t+2\ln(t)$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}t\left(-1+2\frac{\ln(t)}{t}\right)$

و لدينا : $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$

إذن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty(-1+0)$

إذن: $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty}$

و منه : $\boxed{\text{محور الأراتيب اتجاه مقارب ل } (C_f) \text{ بجوار } -\infty}$

-6 أ- لدينا : $f'(x)=2g(x) \qquad x\in\left]-\infty;0\right[$

إذن: $f''(x)=2g'(x) \qquad x\in\left]-\infty;0\right[$

و حسب I- : $g'(-1)=0$ و $g'(x)$ تتغير إشارتها بجوار -1

إذن: $f''(-1)=0$ و $f''(x)$ تتغير إشارتها بجوار -1

و منه : (C_f) يقبل النقطة ذات الأفصول -1 نقطة انعطاف

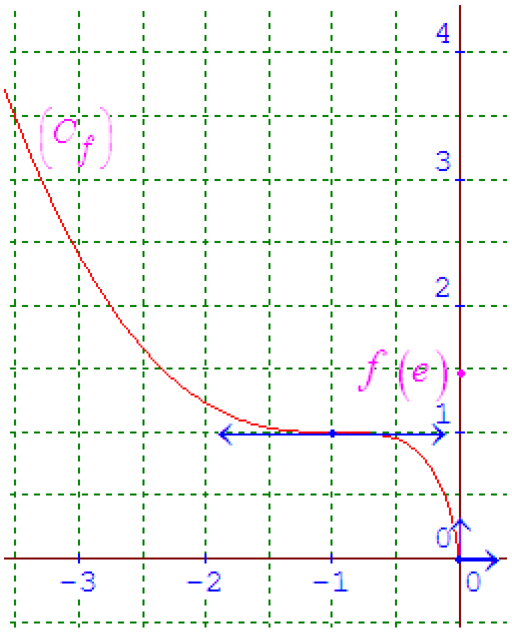
ب- لدينا : $f(-1)=1$ و $f'(-1)=0$

إذن: $y=1$ هي معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الأفصول -1

7-جدول تغيرات f

x	$-\infty \qquad\qquad 0$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

إنشاء (C_f)



(الوحدة $2cm$)

تمرين7

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{x} & x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

1- بين أن : f متصلة في 0

2- نعتبر الدالة h_a $(a\neq 0 \ ; \ a\in I)$ المعرفة على I بما يلي :

$h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$

أ- احسب : $h_a(0)$ و $h_a(a)$

بين أنه يوجد b محصور بين a و 0 بحيث :

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

ب- استنتج أن : f قابلة للإشتقاق في 0

و أن $f'(0)=-2$

3- أ- بين أن : f قابلة للإشتقاق على $I-\{0\}$

و أن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

حيث أن : $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

ب- بين أن : $\forall x\in I-\{0\} : g(x)<0$

ج - استنتج تغيرات f :

4- أ- احسب : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

أول النتيجتين هندسيا .

ب- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1;2]$

بحيث : $f(\alpha)=1$

ج- أنشئ (C_f) التمثيل المبياني ل f على معلم متعامد ممنظم (نأخذ : $\alpha\simeq1.3$)

$II)$ 1- نضع : $J=[1;\alpha]$

و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $(\forall x\in I)$

أ- بين أن : φ قابلة للإشتقاق على I

و أن : $(\forall x\geq1)\ 0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}$

ب- تحقق أن : $\varphi(\alpha)=\alpha$ و أن $\varphi(J)\subset J$

2- نعتبر المتتالية : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$u_0=1$ $u_{n+1}=\ln(1+2u_n)$ $(\forall n\geq0)$

أ- بين أن : $u_n\in J$ $(\forall n\geq0)$

ب- بين أن : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج- استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم حدد نهايتها

الحل

I- 1-

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}$$
$$=2\times1$$

$$\boxed{\lim_{x\to0} f(x)=2}$$

و لدينا : $f(0)=2$

إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)}$

و منه : f متصلة في 0

2- أ- $(a\neq0\ ;\ a\in I)$

$$h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$$

نجد : $h_a(0)=0$ و $h_a(a)=0$

إذن : $h_a(a)=h_a(0)$

و بما أن h_a متصلة قابلة على المجال المحصور بين a و 0

فإنه حسب مبرهنة رول : يوجد b محصور بين a و 0

بحيث : $h'_a(b)=0$

$$h'_a(b)=0\Leftrightarrow\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

ب- استنتاج أن : f قابلة للإشتقاق في 0

$$\lim_{a\to0}\frac{f(a)-f(0)}{a}=\lim_{a\to0}\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}$$
$$=\lim_{b\to0}\frac{-2}{1+2b}$$

$$\boxed{\lim_{a\to0}\frac{f(a)-f(0)}{a}=-2}$$

إذن: f قابلة للإشتقاق في 0

و $\boxed{f'(0)=-2}$

3- أ- لنبين أن : f قابلة للإشتقاق على $I-\{0\}$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$

حيث أن : $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

ب- لنبين أن : $\forall x\in I-\{0\} : g(x)<0$

$$g'(x)=-2\ln(1+2x)$$

x	$-\infty$	0	$-1/2$
$g(x)$	↗ 0	‖	0 ↘

من جدول التغيرات نستنتج :

$$\boxed{\forall x \in I-\{0\} : g(x)<0}$$

ج - تغيرات f :

f تناقصية قطعا

4- أ-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{1+2x} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2x}{x}$$
$$= 0\times 2$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{\ln(1+2x)}{x}$$
$$= (-\infty)\times(-2)$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty}$$

إذن : $\boxed{x=-\frac{1}{2} \text{ مقارب ل } (C_f)}$

ب- لنبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1;2]$

بحيث : $f(\alpha)=1$

نعتبر الدالة : $k(x)=f(x)-1$ معرفة على $[1;2]$

لدينا : f متصلة تناقصية قطعا على I و $[1;2]\subset I$

إذن : k متصلة تناقصية قطعا على $[1;2]$

$$k(1)=\ln(3)-1 \; ; \; k(2)=\frac{\ln(5)}{2}-1$$

$\ln(3)-1=\ln(3)-\ln(e)$ و $\ln(3)>\ln(e)$

إذن : $\ln(3)-1>0$ ومنه : $\boxed{k(1)>0}$

$$\frac{\ln(5)}{2}-1=\frac{\ln(5)-2\ln(e)}{2}$$
$$=\frac{\ln(5)-\ln(e^2)}{2}$$

و $5<e^2$ إذن : $\ln(5)<\ln(e^2)$

ومنه : $\boxed{k(2)<0}$

بما أن : k متصلة تناقصية قطعا على $[1;2]$

و $k(1)k(2)<0$

فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1;2]$

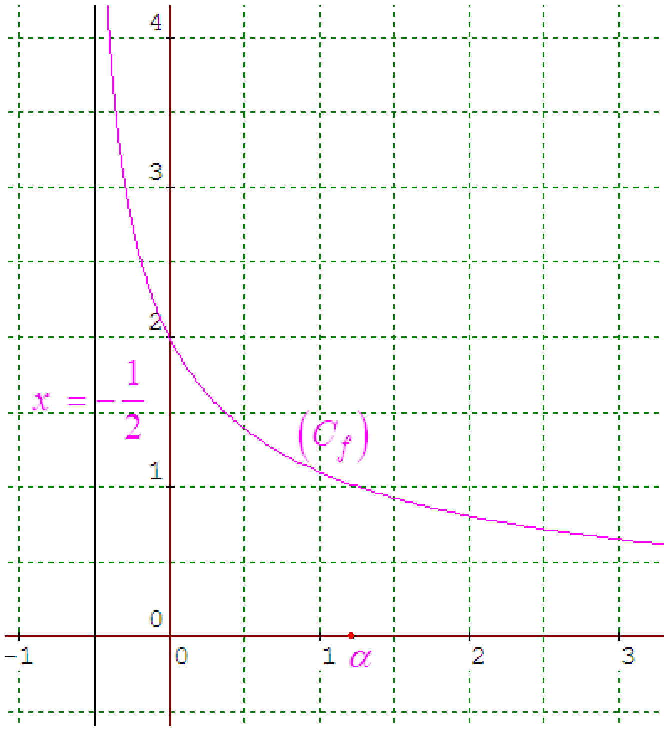
بحيث : $f(\alpha)=1$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1;2]$

بحيث : $k(\alpha)=0$

ج- أنشئ (C_f) التمثيل المبياني ل f على معلم متعامد منظم (نأخذ : $\alpha\simeq1.3$)

x	$-1/2$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0



(II **1**- نضع : $J=[1;\alpha]$

و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $\quad(\forall x\in I)$

أ- φ قابلة للإشتقاق على I

$$\varphi(x)=\frac{2}{1+2x} \quad (\forall x\in I)$$

لدينا : $\frac{2}{1+2x}>0$ $\quad(\forall x\geq1)$

لدينا : $\frac{2}{1+2x}\leq\frac{2}{3}$ $(\forall x\geq1)$ $\Leftrightarrow$ $1+2x\geq3$ $(\forall x\geq1)$

إذن : $0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}$ $\quad(\forall x\geq1)$

ب- لدينا : $f(\alpha)=1$

إذن : $\frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha}=1 \Leftrightarrow \ln(1+2\alpha)=\alpha$

و منه : $\varphi(\alpha)=\alpha$

بما أن : $(\forall x \geq 1)\ \ 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$

فإن : φ تزايدية على $[1;+\infty[$

و $J \subset [1;+\infty[$

إذن : $\varphi(J) = [\varphi(1);\varphi(\alpha)] = [\ln 3;\alpha]$

و لدينا : $\ln(3) > \ln(e)$ إذن : $\ln(3) > 1$

إذن : $[\ln 3;\alpha] \subset [1;\alpha]$

و منه : $\varphi(J) \subset J$

-2 لدينا : $u_0 = 1 \quad u_{n+1} = \ln(1+2u_n) \quad (\forall n \geq 0)$

إذن : $\varphi(u_n) = u_{n+1}$

أ- لنبين أن : $(\forall n \geq 0)\ \ u_n \in J$

بالترجع :

لدينا : $u_0 = 1$ و $1 \in J$

إذن : $u_0 \in J$

نفترض أن : $u_n \in J$

إذن : $\varphi(u_n) \in \varphi(J)$

بما أن : $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ و $\varphi(J) \subset J$

فإن : $u_{n+1} \in J$

حسب برهان الترجع : $\boxed{(\forall n \geq 0)\ \ u_n \in J}$

ب- لنبين أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

بالترجع :

لدينا : $u_0 = 1 \quad \alpha \in [1;2]$

إذن : $0 < \alpha - 1 \leq 1$

و منه : $|u_0 - \alpha| \leq 1$

إذن : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$

نفترض أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

لدينا : $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ و $\varphi(\alpha) = \alpha$

$|u_{n+1} - \alpha| = |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)|$

إذن : $= |\ln(1+2u_n) - \ln(1+2\alpha)|$

$= \left|\ln\left(\frac{1+2u_n}{1+2\alpha}\right)\right|$

نعلم أن : $\forall x \in]0;+\infty[\quad \ln x < x$

إذن : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left|\frac{1+2u_n}{1+2\alpha}\right|$

لدينا : $\left|\frac{1+2u_n}{1+2\alpha}\right| = \left|\frac{2(u_n-\alpha)}{1+2\alpha} + \frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right|$

و $\left|\frac{2(u_n-\alpha)}{1+2\alpha} + \frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right| \leq \frac{2}{1+2\alpha}|u_n - \alpha| + \left|\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right|$

و $\frac{2}{1+2\alpha} < \frac{2}{3}$ (لأن $\alpha \in [1;2]$)

و $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

إذن :

$$\frac{2}{1+2\alpha}|u_n - \alpha| + \left|\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left|\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

و منه : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

حسب برهان الترجع : $\boxed{(\forall n \geq 0)\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

ج- لنستنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم نحدد نهايتها

لدينا : $(\forall n \geq 0)\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

إذن : $\lim |u_n - \alpha| \leq \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n$ و $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

و منه : $\lim |u_n - \alpha| = 0$

إذن : $\lim u_n = \alpha$

إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و $\lim u_n = \alpha$

التما رين : 8 -9 -10 مثل التمرينين 1 - 2

مع الإنباه إلى :

إذاكان : $0 < a < 1$ فإن $\log_a$ تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$

إذاكان : $a > 1$ فإن $\log_a$ تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

$\log = \log_{10}$ تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

تمرين 8

حل في $\mathbb{R}$:

-1 $\log_4(x+2) + \log_4(x+3) = \log_4 6$

-2 $\log_{\frac{2}{3}}|x+2| + \log_{\frac{2}{3}}|x+5| = \log_{\frac{2}{3}} 6$

-3 $\log_3^2 x - 7\log_3 x + 6 = 0$

تمرين 9

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات :

-1 $\log_{\frac{2}{3}}(x-1) \leq 0$

-2 $\log_{\frac{3}{5}}(x-1) - \log_{\frac{3}{5}}(2x-4) > 0$

تمرين 10

حل في $\mathbb{R}$:

-1 $\log(x+2)+\log(x+3)=\log 6$

-2 $\log|x+2|+\log\log_{\frac{2}{3}}|x+5|=\log 6$

-3 $\log^2 x-7\log x+6=0$

تمرين11

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات :

-1 $\log(x-1)\leq 0$

-2 $\log(x-1)-\log(2x-4)>0$