

$$f'_y(x) = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$$

بما أن : $y \in]-1;1[$ فإن : $f'_y(x) > 0$: $\forall x \in]-1;1[$
 إذن : f_y تزايدية على $]-1;1[$

$$f_y(]-1;1[) =]-1;1[$$

و منه : $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad f_y(x) \in E$

$$\forall (x;y) \in E^2 \quad x * y \in E$$

إذن : * قانون تركيب داخلي في E

2- لنبين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

أ- لنبين أن : * تجميعي

نعتبر : $(x;y;z) \in E^3$

$$\begin{aligned} (x*y)*z &= \frac{x+y}{1+xy} * z \\ &= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} * z} \end{aligned}$$

$$(x*y)*z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$x*(y*z) = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \quad \text{كذلك :}$$

$$(x*y)*z = x*(y*z) \quad \text{إذن :}$$

و منه : * تجميعي

ب- لنبين أن : * تبادلي

نعتبر : $(x;y) \in E^2$

$$x*y = \frac{x+y}{1+xy}$$

$$= \frac{y+x}{1+yx}$$

$$x*y = y*x \quad \text{إذن :}$$

و منه : * تبادلي

ج- لبين أن * يقبل عنصرا محايدا ثم نحدده

نعتبر : $e \in E$ بحيث :

$$\forall x \in E \quad x*e = e*x = x$$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد e بحيث : $x*e = x$

الزمرة - الحلقة - الجسم

تمرين 1

نعتبر : $E =]-1;1[$

ليكن : $(x;y) \in E^2$

$$x*y = \frac{x+y}{1+xy} \quad \text{نضع :}$$

1- بين أن : * قانون تركيب داخلي في E

2- بين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

الحل

1- لنبين أن : * قانون تركيب داخلي في E

نعتبر : $y \in E$

$$\text{نعتبر الدالة : } f_y(x) = \frac{x+y}{1+xy} \quad \text{معرفة على } E =]-1;1[$$

إذن : $(1;0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة * في E

مماثل $(x;y)$

أ- $x \neq 0$

$$(xx' + yy'; xy' + yx') = (1;0)$$

$$\begin{cases} xx' + yy' = 1 \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2x' + xyy' = x \\ xyy' + y^2x' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(x^2 - y^2) = x \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

مماثل $(x;y)$ هو $(x;-y)$

ب- الحالة : $x = 0$: إذن : $y = 1$ أو $y = -1$

$$(xx' + yy'; xy' + yx') = (1;0)$$

$$\begin{cases} yy' = 1 \\ yx' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{y} \\ x' = 0 \end{cases} \quad y \neq 0$$

مماثل $(0;1)$ هو $(0;1)$ و مماثل $(0;-1)$ هو $(0;-1)$

تمرين 3

زمرة غير تبادلية (العنصر المحايد هو e)

(مماثل a هو a^{-1})

نعتبر : $C = \{a \in G / \forall x \in G \quad xa = ax\}$

بين أن : $(C; \times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G; \times)$

الحل

لنبين أن : $\forall (a;b) \in C \quad ab^{-1} \in C$

نعتبر : $x \in G$

$$ab^{-1}x = a(x^{-1}b)^{-1}$$

$$b \in C \Rightarrow x^{-1}b = bx^{-1}$$

$$ab^{-1}x = a(bx^{-1})^{-1} = axb^{-1}$$

$$a \in C \Rightarrow ax = xa$$

$$\forall (a;b) \in C \quad \forall x \in G \quad ab^{-1}x = xab^{-1}$$

$$\boxed{\forall (a;b) \in C \quad ab^{-1} \in C} \quad \text{إذن :}$$

ومنه : $(C; \times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G; \times)$

لدينا : $1_G \in C$ لأن $\forall x \in G \quad x1_G = 1_Gx$

إذن : $C \neq \emptyset$

$$x * e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x$$

$$\Leftrightarrow x+e = x+x^2e; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e = x^2e$$

$$\Leftrightarrow e(1-x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow e(1-x^2) = 0; \forall x \in E$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e=0}$$

إذن : * يقبل عنصرا محايدا و هو 0

د- لنبين أن جميع عناصر E تقبل مماثلا بالنسبة للقانون * في E
نعتبر : $x \in E$

y مماثل ل x يعني : $x * y = y * x = 0$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد y بحيث : $x * y = 0$

$$x * y = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -x$$

بما أن : $-x \in E$

إذن : جميع عناصر E تقبل مماثلا بالنسبة للقانون * في E

إذن : من - أ - ب - ج - د - $(E; *)$ زمرة تبادلية

تمرين 2

نعتبر : $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1\}$

ليكن : $(x;y) \in E^2$ و $(x';y') \in E^2$

نضع : $(x;y) * (x';y') = (xx' + yy'; xy' + yx')$

1- بين أن : * قانون تركيب داخلي في E

2- بين أن : $(E; *)$ زمرة تبادلية

الحل

1- * قانون تركيب داخلي في E (الحساب)

2- التجميعية و التبادلية évident

العنصر المحايد :

$$(x;y) * (e_x; e_y) = (xe_x + ye_y; xe_y + ye_x) = (x;y)$$

$$\begin{cases} xe_x + ye_y = x \\ xe_y + ye_x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2e_x + xye_y = x^2 \\ xye_y + y^2e_x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_x(x^2 - y^2) = x^2 - y^2 \\ xe_x + ye_y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_x = 1 \\ x + ye_y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_x = 1 \\ e_y = 0 \end{cases}$$

تمرين 4

$a \in G$ زمرة $(G; \times)$

نعتبر: $H_a = \{x \in G / xa = ax\}$

بين أن: زمرة جزئية للزمرة $(G; \times)$ $(H_a; \times)$

الحل

لنبين أن: $\forall (x; y) \in H_a^2 \quad xy^{-1} \in H_a$

$$x \in H_a \Leftrightarrow xa = ax \Leftrightarrow a^{-1}x = xa^{-1}$$

$$y \in H_a \Leftrightarrow ya = ay \Leftrightarrow a^{-1}y = ya^{-1}$$

$$xy^{-1}a = x(a^{-1}y)^{-1} = x(ya^{-1})^{-1} = xay^{-1} = axy^{-1}$$

إذن: $\forall (x; y) \in H_a^2 \quad xy^{-1}a = axy^{-1}$

ومنه: $\forall (x; y) \in H_a^2 \quad xy^{-1} \in H_a$

إذن: زمرة جزئية للزمرة $(G; \times)$ $(H_a; \times)$

تمرين 5

نعتبر:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

نعتبر التطبيق:

$$f : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (E; \times)$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

1- بين أن: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- بين أن: f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(E; \times)$

3- استنتج بنية المجموعة $(E; \times)$

$$4- \text{ نعتبر: } M = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

احسب: M^2 ; M^3 ; ثم استنتج M^n

الحل

1- لنبين أن: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

$$\text{نعتبر: } \left(\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \right) \in E^2$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -\cos x \sin y - \sin x \cos y \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} \in E$$

و

$$\forall \left(\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \right) \in E^2 \text{ : إذن}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \in E$$

و منه: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- لنبين أن: f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(E; \times)$

نعتبر: $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -\cos x \sin y - \sin x \cos y \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

إذن: f تشاكل من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(E; \times)$

$$\forall \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \in E \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(E; \times)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(E; \times)$

بما أن: f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(E; \times)$

و زمرة تبادلية $(\mathbb{R}; +)$

فإن: زمرة تبادلية $(E; \times)$

$$4- \text{ نعتبر: } M = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

حساب: M^2 ; M^3 ; ثم استنتاج M^n

من: $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

نبين بالترجع أن: $f(nx) = (f(x))^n$

$$\left(\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \right)^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix} \text{ : إذن}$$

تمرين 6

نعتبر:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{R}^2; (a; b) \neq (0; 0) \right\}$$

إذن : شمولي f (ب)

من : (ا) و (ب) : f تقابل

3- بين أن : f تشاكل من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix} \\ = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = (a + bi)(c + di)$$

إذن : f تشاكل من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

4- استنتاج بنية المجموعة $(E; \times)$

بما أن : f تشاكل تقابلي من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

فإن : f^{-1} تشاكل $(\mathbb{C}^*; \times)$ من نحو $(E; \times)$

و بما أن : زمرة $(\mathbb{C}^*; \times)$

فإن : زمرة $(E; \times)$

ملاحظة

(مماثل $a + ib$ في $(\mathbb{C}^*; \times)$ هو $\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$)

(مماثل $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $(E; \times)$ هو $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ -\frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$)

العنصر المحايد في $(\mathbb{C}^*; \times)$ هو 1

العنصر المحايد في $(E; \times)$ هو $f^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

تمرين 7

($G; *$) زمرة العنصر المحايد هو e (مماثل a هو a^{-1})

$f_a : G \rightarrow G$

التطبيق f_a معرف بما يلي : $x \mapsto a * x * a^{-1}$

نعتبر : $F = \{f_a / a \in G\}$

$f : G \rightarrow F$

نعتبر التطبيق : $a \mapsto f_a$

1- بين أن $(F; \circ)$ جزء مستقر من $(\mathcal{F}; \circ)$

2- بين أن : f تشاكل شمولي من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(F; \circ)$

الحل

$f : E \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + ib$$

نعتبر التطبيق :

1- بين أن : E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- بين أن : f تقابل

3- بين أن : f تشاكل من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

4- استنتاج بنية المجموعة $(E; \times)$

الحل

1- لنبين أن : E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix} \in E \quad \text{و}$$

إذن : $\forall \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \in E$$

ومنه : E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- لنبين أن : f تقابل

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow a + ib = c + id \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

إذن : f تباين (ا)

نعتبر : $c + id \in \mathbb{C}^*$

لنحدد : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in E$ بحيث : $f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c + id$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c + id \Leftrightarrow a + ib = c + id$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c + id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

1- لنبين أن : $(F; \circ)$ جزء مستقر من $(\mathcal{F}; \circ)$

يعني : $\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b \in F$
نعتبر : $x \in G$

$$f_a \circ f_b (x) = a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1}$$

بما أن : * تجميعي و $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

$$a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1} = (a * b) * x * (a * b)^{-1}$$

إذن : $\forall x \in G \quad f_a \circ f_b (x) = f_{a*b} (x)$

$$\boxed{\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b}}$$

وبما أن : * قانون تركيب داخلي في G

فإن : $a * b \in G$

إذن : $f_{a*b} \in F$

ومنه : $f_a \circ f_b \in F$

إذن : $\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b \in F$

ومنه : $(F; \circ)$ جزء مستقر من $(\mathcal{F}; \circ)$

2- لنبين أن : f تشاكل من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

نعتبر : $(a; b) \in G^2$

لدينا : $f(a * b) = f_{a*b}$

إذن : $f(a * b) = f_a \circ f_b$

إذن : f تشاكل من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$ (a)

- لنبين أن : f شمولي

لدينا : $\forall f \in F \quad \exists a \in E \quad f(a) = f_a$

إذن : f شمولي (b)

ومن : (a) و (b)

f تشاكل شمولي من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(F; \circ)$

بما أن : f تشاكل شمولي من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

و $(G; *)$ زمرة

فإن : $(F; \circ)$ زمرة

ملاحظة

العنصر المحايد في $(G; *)$ هو e

العنصر المحايد في $(F; \circ)$ هو f_e $f(e) = f_e$

مماثل a في $(G; *)$ هو a^{-1}

مماثل f_a في $(F; \circ)$ هو $f_{a^{-1}}$ $f(a^{-1}) = f_{a^{-1}}$

تمرين 8

بين أن : $(\mathbb{Z}^2; +; \times)$ حلقة تبادلية واحدة

بحيث : $\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2$ و $\forall (x'; y') \in \mathbb{Z}^2$

$$(x; y) + (x'; y') = (x + x'; y + y')$$

$$(x; y) \times (x'; y') = (xx' + 2yy'; xy' + yx')$$

الحل

أ- $(\mathbb{Z}^2; +)$ زمرة تبادلية (واضح)

صفر $(\mathbb{Z}^2; +)$ هو $(0; 0)$ مماثل $(x; y)$ هو $(-x; -y)$ في

$(\mathbb{Z}^2; +)$

ب- \times تجميعي في \mathbb{Z}^2 (الحساب)

ج- \times تبادلي في \mathbb{Z}^2 (الحساب)

د- وحدة $(\mathbb{Z}^2; \times)$ هي $(1; 0)$

هـ- القانون \times توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في \mathbb{Z}^2

بما أن \times تبادلي في \mathbb{Z}^2

نكتفي بالبرهنة أن :

$$\forall (x''; y'') \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (x'; y') \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2$$

$$(x; y) \times ((x'; y') + (x''; y'')) = ((x; y) \times (x'; y')) + ((x; y) \times (x''; y''))$$

(كذلك الحساب)

من (أ- ب- ج- د- هـ) $(\mathbb{Z}^2; +; \times)$ حلقة تبادلية واحدة

تمرين 9

1- بين أن : $1 + j + j^2 = 0$ بحيث : $j = e^{2i\pi/3}$

2- نعتبر : $E = \{z \in \mathbb{C} / \exists (a; b) \in \mathbb{R}^2 : z = a + bj\}$

بين أن : $(E; +; \times)$ حلقة تبادلية واحدة

الحل

أ- $(E; +)$ زمرة تبادلية (واضح)

طريقة البرهنة أن : $(E; +)$ زمرة تبادلية

نبين أن : $(E; +)$ زمرة تبادلية مباشرة

أو من الأحسن نبين أن : $(E; +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}; +)$

و بما أن : $(\mathbb{C}; +)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E; +)$ زمرة تبادلية

ب- \times قانون تركيب داخلي في E (الحساب و العلاقة

$$(1 + j + j^2 = 0)$$

بما أن $(\mathbb{C}; +; \times)$ جسم تبادلي و $E \subset \mathbb{C}$ و \times قانون تركيب

داخلي في E

فإن : ج- \times تجميعي في E (الحساب)

د- \times تبادلي في E (الحساب)

ج- وحدة $(E; \times)$ هي 1

هـ- القانون \times توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E

من (أ-ب-ج-د-هـ) حلقة تبادلية واحدة $(E; +; \times)$

تمرين 10

بين أن $(\mathbb{R}; *, T)$ جسم تبادلي

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x * y = x + y - 1 \\ x T y = x + y - xy \end{cases}$$

الحل

أ- $(\mathbb{R}; *)$ زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في $(\mathbb{R}; *)$ هو 1

ب- $(\mathbb{R} - \{1\}; T)$ زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في $(\mathbb{R}; T)$ هو 0

ج- القانون T توزيعي بالنسبة للقانون * في \mathbb{R} (الحساب)
بما أن T تبادلي في \mathbb{R}
نكتفي بالبرهنة أن:

$$\forall (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \quad x T (y * z) = (x T y) * (x T z)$$

من (أ-ب-ج) $(\mathbb{R}; *, T)$ جسم تبادلي

تمرين 11

نعتبر:

$$\mathbb{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} / (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

بين أن $(\mathbb{K}; +; \times)$ جسم تبادلي

الحل

1- $(\mathbb{K}; +)$ زمرة تبادلية (الطريقة)

- بما أن $(M_2(\mathbb{R}); +)$ زمرة تبادلية و $\mathbb{K} \subset M_2(\mathbb{R})$

يكفي ان نبين أن $(\mathbb{K}; +)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}); +)$

ومنه $(\mathbb{K}; +)$ زمرة تبادلية

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})} \text{ هو } (\mathbb{K}; +) \text{ العنصر المحايد في}$$

2- $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}; \times)$ زمرة تبادلية (الطريقة)

أ- \times قانون تركيب داخلي في \mathbb{K} (الحساب)

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa-5yb & xb+ya+2yb \\ -5(xb+ya+2yb) & (xa-5yb)+2(xb+ya+2yb) \end{pmatrix}$$

ب- \times تبادلي في $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\})$ (الحساب)

- بما أن $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$ حلقة واحدة و $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ و \times قانون

تركيب داخلي في \mathbb{K}

ج- \times تجميعي في $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\})$

د- وحدة $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}; \times)$ هي $1_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

هـ- لنبين أن جميع عناصر $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\})$ تقبل ماثلا في

$$\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$$

بما أن \times تبادلي في $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\})$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} \in \mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\} \text{ نكتفي بتحديد:}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ بحيث:}$$

$$\begin{cases} xa-5yb=1 \\ xb+ya+2yb=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax-5by=1 \\ bx+(a+2b)y=0 \end{cases} \text{ نجد:}$$

$$5b^2 + 2ab + a^2 \neq 0$$

لأن $\Delta'_a = -4b^2 < 0$ و $\Delta'_b = -4a^2 < 0$

$$\begin{cases} x = \frac{a+2b}{5b^2 + 2ab + a^2} \\ y = \frac{-b}{5b^2 + 2ab + a^2} \end{cases} \text{ حل النظمة نجد:}$$

من (أ-ب-ج-د-هـ) $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}; \times)$ زمرة تبادلية

3- القانون \times توزيعي بالنسبة للقانون + في \mathbb{K}

بما أن $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$ حلقة واحدة و $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ و \times قانون

تركيب داخلي في \mathbb{K} فإن القانون \times توزيعي بالنسبة للقانون + في \mathbb{K}

من (1-2-3) $(\mathbb{K}; +; \times)$ جسم تبادلي

تمرين 12 (الإستدراكية 2003)

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ نعتبر:}$$

$$E = \{M_{(a,b)} / a^2 - 2b^2 = 1\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

1- تحقق أن $A \in E$

2- بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

و أن قانون التركيب الداخلي \times تبادلي في E

3- بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي \times

4- بين أن $(E; \times)$ زمرة تبادلية