

## الدوال اللوغارتمية

### السلسلة 1 (5 تمارين)

التمرين 1 :

#### الجزء الأول

لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $[0, +\infty]$  بما يلي :

$$(1) \text{ أدرس تغيرات } g \text{ على } [0, +\infty]$$

$$(2) \text{ بين أنه يوجد على } \alpha \text{ وحد من } [0, +\infty] \text{ بحيث } g(\alpha) = 0$$

$$(3) \text{ أدرس إشارة } g(x) \text{ على } [0, +\infty]$$

#### الجزء الثاني

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $[0, +\infty]$  بما يلي :

ولتكن  $(C_f)$  منحناها في معلم متعدد  $(O, i, j)$ .

$$(1) \text{ أحسب } f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ ثم حدد الفروع اللانهائية لـ } (C_f)$$

(2) أدرس الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = 2x$

(3) بين أن  $(f'(x))$  و  $(g(x))$  لهما نفس الإشارة ثم ضع جدول تغيرات  $f$

$$(4) \text{ أنشئ } (C_f) \text{ (نأخذ } |\vec{j}| = 1cm \text{ و } |\vec{i}| = 2cm)$$

#### الجزء الثالث

ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$

نرمز بـ  $\mathcal{D}$  الحيز المستوى المحصور بين  $x = n$  و  $x = 1$  و المستقيمين اللذين معادلتهما

$$(1) \text{ بين أن مساحة هذا الحيز بـ } cm^2 \text{ هي : } I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$(2) \text{ باستعمال متكاملة بالأجزاء أحسب } \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$(3) \text{ استنتج تعبير } I_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$$

: التمرين 2

الجزء الأول

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $[ -1, +\infty )$  بما يلي :  
و ليكن  $(C_f)$  منحناها في معلم متعدد  $(O, i, j)$ . و  $(D)$  المستقيم ذي المعادلة  $y = x$ .

أ. أدرس تغيرات  $f$

ب. أحسب نهايات  $f$  عند محدات  $D_f$

2) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $[ -1, +\infty )$  بما يلي :

أ. أحسب  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$

ب. حدد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  واستنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

ج. أدرس تغيرات  $g$  ثم ضع جدول تغيراتها

د. بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل بالضبط حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $0 < \alpha < \beta$

هـ. أدرس إشارة  $g$  و استنتاج الوضع النسبي ل  $(C_f)$  و  $(D)$

الجزء الثاني

نعتبر المتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) بين أن :  $2 \leq u_n \leq \beta$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

2) هل  $(u_n)_n$  متقاربة ؟ علل جوابك

: التمرين 3

الجزء الأول

لتكن  $U$  الدالة العددية المعرفة على  $[ 0, +\infty )$  بما يلي :

1) بين أن  $U$  تزايدية قطعا على  $[ 0, +\infty )$

2) بين أن المعادلة  $U(x) = 0$  تقبل حال و حيدا  $\alpha$  في المجال  $[ 0, +\infty )$  ثم تحقق أن  $3 < \alpha < 2$

3) استنتاج إشارة  $U$  على  $[ 0, +\infty )$

الجزء الثاني

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $[ 0, +\infty )$  بما يلي :

ولتكن  $(C_f)$  منحناها في معلم متعمد منظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} f(x) \quad (1)$$

$$(2) \text{ أ- بين أن لكل } x \text{ من } ]0, +\infty[ \text{ } f'(x) = \frac{U(x)}{x^2}$$

ب- استنتج تغيرات  $f$  على  $]0, +\infty[$

### الجزء الثالث

لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :

ولتكن  $(C_g)$  المنحنى الممثل للدالة  $g$  في نفس المعلم المتعمد المنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

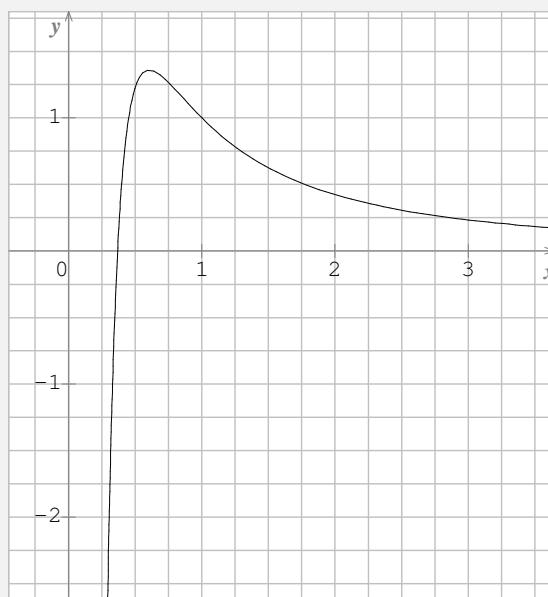
(1) بين أن أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$   $f(x) - g(x) = \frac{2 - \ln x}{x}$  يتقاطعان في نقطة وحيدة يتم تحديدها.

(2) بين أن  $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  دالة أصلية للدالة  $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$

(3) أحسب التكامل على  $I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx$  ثم أول مبيانا هذه النتيجة

### التمرين 4

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ . ولتكن  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعمد منظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (أنظر الشكل أسفله)



(1) أ- أدرس نهاية  $f$  في 0 على اليمين

ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج- حدد مقاربات  $(C_f)$

(2) أ- بين أن :  $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$  لكل  $x$  من  $[0, +\infty[$

ب- حل في  $[0, +\infty]$  المترادفة  $-1 - 2 \ln x > 0$  . و استنتج إشارة  $f'(x)$  على  $[0, +\infty[$

ج- ضع جدول تغيرات  $f$

(3) أ- بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع محور الأفاسيل في نقطة وحيدة يتم تحديد إحداثياتها

ب- استنتاج إشارة  $f$  على  $[0, +\infty[$

(4) لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  ، نرمز بـ  $I_n$  لمساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و محور الأفاسيل و المستقيمين اللذين معادلتهما

$$x = n \text{ و } x = \frac{1}{e}$$

أ- بين أن  $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$

ب- بين أن  $F: x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0, +\infty[$

ج- أحسب  $I_n$  بدالة  $F$

د- أحسب نهاية  $(I_n)$  عند  $+\infty$ .

التمرين 5 :

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :

الجزء الأول

(1) بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $x^2 - 2x + 2 > 0$

(2) أحسب  $f'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم أدرس تغيرات  $f$

(3) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(4) أدرس الفروع اللانهائية لـ  $(C_f)$

(5) بين أن  $x = 1$  هو محور تماثل لـ  $(C_f)$

(6) مثل مبيانا  $(\Delta)$  :  $y = x$  و  $(C_f)$

الجزء الثاني

نضع  $\varphi(x) = f(x) - x$

(1) أحسب  $\varphi'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ، ثم استنتاج أن  $\varphi$  تناقصية قطعا على  $\mathbb{R}$

(2) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$

ب- بين أن لكل  $x > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = x \left[ \frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x} - 1 \right]$$

ج- بين أن  $y = x$  يقطع  $(C_f)$  في نقطة وحيدة أقصولها  $\alpha$  بحيث  $0,3 < \alpha < 0,4$

تصحيح التمارين الأول

الجزء الأول :

: 1) لندرس تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $]0, +\infty[$

لدينا  $g$  قابلة للاشتغال على المجال  $]0, +\infty[$

ليكن  $x \in ]0, +\infty[$

لدينا :

$$g'(x) = (2x^3 - 1 + 2\ln x)'$$

$$= 6x^2 + \frac{2}{x}$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in ]0, +\infty[) \quad g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}$$

و من الواضح أن  $0 < g'(x)$

و منه الدالة  $g$  تزايدية قطعا على  $]0, +\infty[$

(2)

✓ لدينا  $g$  متصلة على  $]0, +\infty[$

✓ و  $g$  تزايدية قطعا على  $]0, +\infty[$

✓ و لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = ]-\infty, +\infty[$  لأن  $0 \in g(]0, +\infty[)$

و منه يوجد  $\alpha$  و حيد من  $]0, +\infty[$  بحيث  $g(\alpha) = 0$

(3) لندرس إشارة  $g(x)$  :

✓ على المجال  $]0, \alpha]$  لدينا  $0 < x \leq \alpha$  و نعلم أن  $g$  تزايدية

إذن :  $g(x) \leq g(\alpha)$

( $g(\alpha) = 0$ )  $g(x) \leq 0$  و منه

✓ على المجال  $[\alpha, +\infty[$  لدينا  $x \geq \alpha$  و نعلم أن  $g$  تزايدية

إذن :  $g(x) \geq g(\alpha)$

( $g(\alpha) = 0$ )  $g(x) \geq 0$  و منه

الجزء الثاني :

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - \frac{1}{x^2} \ln x = +\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

**التأويل الهندسي:**  
 $x = 0$  يقبل مقاربا عموديا معادلته  $(C_f)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \frac{\ln x}{x^2} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

**التأويل الهندسي:**  
 $y = 2x$  يقبل مقاربا مائلأا معادلته  $+y = 2x$  بجوار  $\infty$

:  $x \in ]0, +\infty[$  (2) لينك

$$f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2} \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا :  $x^2 > 0$  إذن إشارة  $f(x) - 2x$  هي إشارة  $\ln x$

:  $]0, 1[$  على المجال ✓

لدينا  $\ln x \leq 0$

إذن  $-\ln x \geq 0$

و منه  $f(x) - 2x \geq 0$

و وبالتالي  $(\Delta)$  يوجد فوق المستقيم  $(C_f)$

على المجال  $[1, +\infty]$  ✓

لدينا  $\ln x \geq 0$

إذن  $-\ln x \leq 0$

و منه  $f(x) - 2x \leq 0$

و وبالتالي  $(\Delta)$  يوجد تحت المستقيم  $(C_f)$

:  $x \in ]0, +\infty[$  لينك (3)

لدينا ✓ :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( 2x - \frac{\ln x}{x^2} \right)' \\
 &= 2 - \frac{\ln'(x) \times x^2 - \ln(x) \times (x^2)'}{(x^2)^2} \\
 &= 2 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} \\
 &= 2 - \frac{x - \ln(x) \times 2x}{x^4} \\
 &= 2 - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} \\
 &= 2 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \\
 &= \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} \\
 &= \frac{g(x)}{x^3}
 \end{aligned}$$

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \quad \text{إذن}$$

لدينا : ✓ إذن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $x^3 > 0$

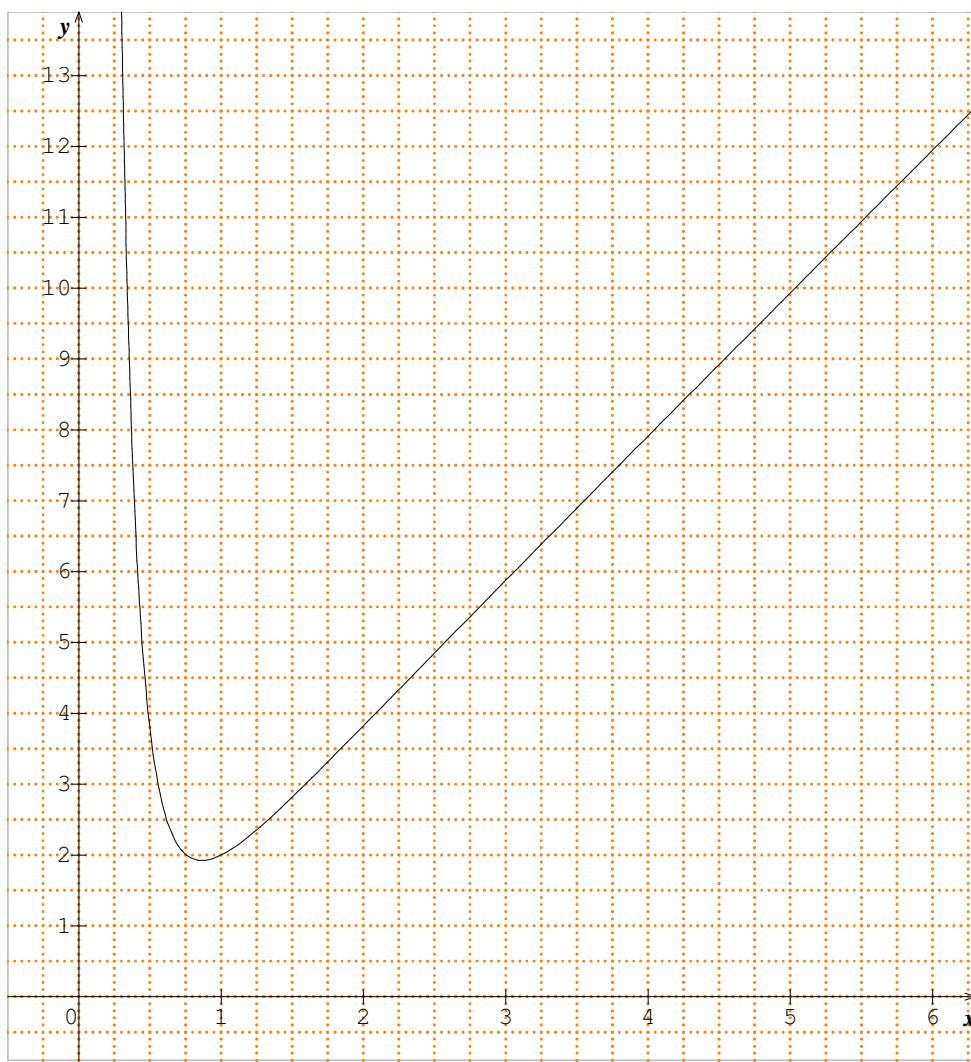
على المجال  $[\alpha, 0]$  إذن  $g(x) \leq 0$  و منه  $f'(x) \leq 0$  تناقصية

و على المجال  $[\alpha, +\infty)$  إذن  $g(x) \geq 0$  و منه  $f'(x) \geq 0$  تزايدية

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4)



الجزء الثالث :

(1)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\ &= \int_1^n \left| -\frac{\ln x}{x^2} \right| dx \times 2cm^2 \\ &= 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^n \ln(x) \times \frac{1}{x^2} dx : (2) \text{ لدينا}$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[ -\frac{\ln x}{x} \right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[ -\frac{\ln x}{x} \right]_1^n - \left[ \frac{1}{x} \right]_1^n \\ &= \left( \left( \frac{-\ln n}{n} \right) - 0 \right) - \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} I_n &= 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ cm}^2 \\ &= \left( 2 - \frac{2}{n} - \frac{\ln n}{n} \right) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

✓

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 2 \text{ cm}^2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \quad \text{لأن}$$

تصحيح التمارين الثاني

الجزء الأول

أ- لندرس تغيرات  $f$  على المجال  $] -1, +\infty [$

لدينا  $f$  قابلة للإشتقاق على  $] -1, +\infty [$

ليكن  $x \in ] -1, +\infty [$

$$f'(x) = (1 + \ln(x + 1))'$$

$$= 0 + \frac{(x + 1)'}{x + 1}$$

$$= \frac{1}{x + 1}$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in ] -1, +\infty [) \quad f'(x) = \frac{1}{x + 1}$$

لدينا :  $x > -1$  إذن  $x + 1 > 0$  و منه  $x + 1 > 0$

و بالتالي :  $f$  تزايدية قطعا على المجال  $] -1, +\infty [$ .

ب- لدينا :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1 + \ln(x + 1) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} 1 + \ln(t) = -\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} t = 1 + x \\ x \rightarrow -1^+ \\ t \rightarrow 0^+ \end{cases} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \ln(x + 1) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \ln(t) = -\infty : \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(x + 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \ln(t) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} t = 1 + x \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty : \text{ لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) - x = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1 + \ln(x + 1) - x = -\infty \quad \text{أ- لدينا : (2)}$$

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1 + \ln(x + 1) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -x = 1 \end{cases} : \text{ لأن}$$

-ب-

$$\begin{cases} t = x + 1 \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \quad \checkmark$$

$\checkmark$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(x+1) - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x+1) \cdot \left( \frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

ج- الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $]-1, +\infty[$   
ليكن  $x \in ]-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f(x) - x)' \\ &= f'(x) - 1 \\ &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{1-1-x}{1+x} \\ &= \frac{-x}{x+1} \end{aligned}$$

لدينا :  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$   
و لدينا :  $x + 1 > 0$  إذن إشارة  $g'(x)$  هي إشارة  $-x$

$x$	-1	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-

جدول تغيرات  $g$

$x$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	↑ 1	$-\infty$

-٤

على المجال  $[-1, 0]$  ✓

- لدينا  $g$  متصلة

- و لدينا  $g$  تزايدية قطعاً

- و لدينا :  $0 \in g([-1, 0]) = [-\infty, 1]$

إذن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  من المجال  $[-1, 0]$  و منه  $\alpha \leq 0$

على المجال  $[0, +\infty]$  ✓

- لدينا  $g$  متصلة

- و لدينا  $g$  تناظرية قطعاً

- و لدينا :  $0 \in g([0, +\infty[) = ]-\infty, 1]$

إذن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\beta$  من المجال  $[0, +\infty[$

- لدينا  $g$  متصلة على  $[2, 3]$

- و  $g(2) \times g(3) \leq 0$

إذن حسب مبرهنة القيمة الوسيطية  $2 \leq \beta \leq 3$

خلاصة: المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل بالضبط حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $\alpha \leq 0 < \beta \leq 3$

-٥

على المجال  $[-1, \alpha]$  ✓

- لدينا  $-1 < x \leq \alpha$  و  $g$  تزايدية

- إذن: إذن:  $g(x) \leq g(\alpha)$

- ( لأن  $g(\alpha) = 0$ ) و منه  $g(x) \leq 0$

على المجال  $[\alpha, \beta]$  ✓

لدينا :  $g([\alpha, \beta]) = [0, 1]$   
 $\forall x \in [\alpha, \beta] \quad 0 \leq g(x) \leq 1$   
 إذن :  $\forall x \in [\alpha, \beta] \quad 0 \leq g(x)$  و منه

✓ على المجال  $[\beta, +\infty[$   
 لدينا  $x \geq \beta$  و  $g$  تناقصية  
 إذن : إذن :  $g(x) \leq g(\beta)$   
 $(g(\beta) = 0) \quad g(x) \leq 0$  و منه

الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(D)$    
 على كل من المجالين  $[-1, \alpha]$  و  $[\beta, +\infty[$  ✓  
 لدينا  $g(x) \leq 0$   
 إذن :  $f(x) - x \leq 0$   
 و منه  $(C_f)$  تحت المستقيم  $(D)$   
 على المجال  $[\alpha, \beta]$  ✓  
 لدينا  $g(x) \geq 0$   
 إذن :  $f(x) - x \geq 0$   
 و منه  $(C_f)$  فوق المستقيم  $(D)$

### الجزء الثاني :

(1) من أجل  $n = 0$  ✓  
 لدينا  $u_0 = 2$   
 إذن :  $2 \leq u_0 \leq \beta$  ليكن  $n \in \mathbb{N}$  ✓  
 نفترض أن :  $2 \leq u_n \leq \beta$  •  
 و نبين أن :  $2 \leq u_{n+1} \leq \beta$  •  
 حسب الإفتراض  $2 \leq u_n \leq \beta$  و نعلم أن  $f$  تزايدية  
 إذن :  $f(2) \leq f(u_n) \leq f(\beta)$   
 إذن :  $1 + \ln 3 \leq u_{n+1} \leq \beta$

و منه  $2 \leq u_{n+1} \leq \beta$

$$\begin{aligned} g(\beta) = 0 &\Leftrightarrow f(\beta) - \beta = 0 \\ &\Leftrightarrow f(\beta) = \beta \end{aligned}$$

لأن  $2 \leq 1 + \ln 3$  و  $f(x) - x \geq 0$  لـ  $x \in [2, \beta]$

نستنتج أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n \leq \beta$  •

(2) على المجال  $[\alpha, \beta]$  لدينا :  $f(x) - x \geq 0$

إذن على المجال  $[2, \beta]$  لأن  $f(x) - x \geq 0$  لـ  $x \in [2, \beta]$

و نعلم أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n \leq \beta$

إذن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) - u_n \geq 0$

إذن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$

و منه المتالية  $(u_n)_n$  تزايدية

❖ بما أن  $(u_n)_n$  تزايدية و مكبورة (بالعدد  $\beta$ ) فإن  $(u_n)_n$  متقاربة

ملاحظة: لدينا :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \in [2, \beta] \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

متصلة على  $f$  •

$f([2, \beta]) \subset [2, \beta]$  •

$(u_n)_n$  متقاربة •

إذن نهاية  $(u_n)_n$  هي حل للمعادلة  $f(x) = x$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow f(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \alpha \text{ أو } x = \beta \end{aligned}$$

و بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \beta$  فإن  $\alpha \notin [2, \beta]$

تصحيح التمرين الثالث

الجزء الأول :

1) لدينا الدالة  $U$  قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$

ليكن  $x \in ]0, +\infty[$

$$U'(x) = (\ln(x) + x - 3)'$$

$$= \frac{1}{x} + 1$$

$$= \frac{1+x}{x}$$

لدينا :  $x > 0$  إذن  $0 > x$  و  $x > 0$

$$\frac{1+x}{x} > 0$$

و منه  $(\forall x \in ]0, +\infty[) U'(x) > 0$

و وبالتالي الدالة  $U$  تزايدية قطعا على  $]0, +\infty[$

(2)

  $U$  متصلة على  $]0, +\infty[$  ✓

  $U$  تزايدية قطعا على  $]0, +\infty[$  ✓

$$0 \in U(]0, +\infty[) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} U(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) \right] = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R} \quad \checkmark$$

إذن المعادلة  $U(x) = 0$  تقبل حل و حيدا  $\alpha$  في المجال  $]0, +\infty[$

  $U$  متصلة على  $[2, 3]$  ✓

$$\begin{cases} U(2) = \ln(2) - 1 < 0 \\ U(3) = \ln 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow U(2) \times U(3) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية :  $2 < \alpha < 3$

(3) لندرس إشارة  $U(x)$

ليكن  $x \in ]0, +\infty[$

✓ على المجال  $]0, \alpha]$

لدينا  $\alpha \leq x < 0$  و  $U$  تزايدية

إذن  $U(x) \leq U(\alpha)$   
 و منه  $U(x) \leq 0$   $\checkmark$   
 على المجال  $[\alpha, +\infty]$   
 لدينا  $x \geq \alpha$  و  $U$  تزايدية  
 إذن  $U(x) \geq U(\alpha)$   
 و منه  $U(x) \geq 0$

الجزء الثاني:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 = +\infty \quad (1)$$

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln(x) - 2) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن:}$$

: أ- ليمكن  $x \in ]0, +\infty[$   
 لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 \right)' \\ &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)' \cdot (\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot (\ln(x) - 2)' + 0 \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot (\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln(x) - 2}{x} + \frac{x - 1}{x^2} \\ &= \frac{\ln(x) + x - 3}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{U(x)}{x^2} : ]0, +\infty[ \quad \text{إذن: لكل } x \text{ من} \end{aligned}$$

ب- لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow U(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \alpha \end{aligned}$$

لدينا :  $x^2 > 0$  إذن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $U(x)$

✓ على المجال  $[0, \alpha]$  : لدينا  $U(x) \leq 0$

إذن  $f'(x) \leq 0$

و منه  $f$  تنقصصية

✓ على المجال  $[\alpha, +\infty)$  : لدينا  $U(x) \geq 0$

إذن  $f'(x) \geq 0$

و منه  $f$  تزايدية

### الجزء الثالث :

:  $x \in [0, +\infty[$  ليكن (1)

✓ لدينا :

$$f(x) - g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x)$$

$$\begin{aligned} &= \ln(x) - 2 - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} + 2 - \ln(x) \\ &= \frac{2 - \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{2 - \ln x}{x} : ]0, +\infty[$$

إذن لكل  $x$  من لحدود تقاطع  $(C_g)$  و  $(C_f)$  ✓

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = e^2$$

إذن  $(C_g)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطة وحيدة

(2)

✓ الدالة  $H$  قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$

✓ ليكن  $x \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
 H'(x) &= \left( \frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right)' \\
 &= \frac{1}{2} \times 2 \times \ln'(x) \times \ln(x) \\
 &= \frac{1}{x} \times \ln x \\
 &= \frac{\ln x}{x} \\
 H'(x) = h(x) : ]0, +\infty[ &\quad \text{إذن : لكل } x \text{ من } ]0, +\infty[ \\
 ]0, +\infty[ \text{ على } h : x \mapsto \frac{\ln x}{x} \text{ دالة أصلية للدالة } H : x \mapsto \frac{1}{2} (\ln x)^2 \text{ و منه :} \\
 &\quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx \\
 &= \int_1^{e^2} \frac{2}{x} dx - \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \\
 &= [2 \ln x]_1^{e^2} - [H(x)]_1^{e^2} \\
 &= (4 - 0) - (2 - 0) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

التأويل الهندسي :

التكامل  $I$  يمثل مساحة الحيز المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتها هما  $x = 1$  و  $x = e$  و  $y = C_g$  و  $y = C_f$  (بوحدة قياس المساحة )

تصحيح التمارين الرابع

-أ-

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 + \ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} \cdot (1 + \ln x)$$

$$= -\infty$$

: لأن

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + \ln x) = -\infty \end{cases}$$

-ب-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= 0$$

: لأن

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$$

ج- لدينا  $x = 0$  إذن  $(C_f)$  يقبل مقارب عمودي معادله  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

و لدينا  $y = 0$  إذن  $(C_f)$  يقبل مقارب أفقي معادله  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  بجوار  $+\infty$

أ- الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $[0, +\infty[$

ليكن  $x \in ]0, +\infty[$

: لدينا

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( \frac{1 + \ln x}{x^2} \right)' \\
 &= \frac{(1 + \ln x)' \cdot x^2 - (1 + \ln x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 + \ln x) \cdot 2x}{x^4} \\
 &= \frac{x - (1 + \ln x) \cdot 2x}{x^4} \\
 &= \frac{x(1 - 2 - 2\ln x)}{x^4} \\
 &= \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}
 \end{aligned}$$

إذن :  $f'(x) = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}$

-ب-

✓ لـ  $-1 - 2\ln x > 0$  المتراجحة :

$$-1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow -1 > 2\ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln x < \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < e^{\frac{-1}{2}}$$

$$S = \left] 0, e^{\frac{-1}{2}} \right[ \quad \text{إذن :}$$

✓

$$-1 - 2\ln x > 0 \quad x^3 > 0 \quad \text{و} \quad 0 < x < e^{\frac{-1}{2}} \quad \bullet \quad \text{على المجال}$$

إذن :  $f'(x) > 0$

$$-1 - 2\ln x \leq 0 \quad x^3 > 0 \quad \text{و} \quad 0 < x \leq e^{\frac{-1}{2}} \quad \bullet \quad \text{على المجال}$$

إذن :  $f'(x) \leq 0$

ج- جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	0	$e(-1/2)$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$e/2$	0

أ- نبين أن  $(C_f)$  يقطع محور الأفاسيل في نقطة واحدة :

لحل في المجال  $[0, +\infty]$  المعادلة  $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

إذن  $(C_f)$  يقطع محور الأفاسيل في نقطة واحدة هي

ب- على المجال  $[0, e^{-1}]$

و على المجال  $[e^{-1}, +\infty]$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}e : \text{لدينا } \left[ \frac{1}{e}, 2 \right] \quad (4)$$

$$\text{إذن : } 0 \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx \leq \frac{1}{2}e \int_{\frac{1}{e}}^2 dx$$

$$\text{إذن : } 0 \leq I_2 \leq \frac{1}{2}e \left[ x \right]_{\frac{1}{e}}^2$$

$$\text{إذن : } 0 \leq I_2 \leq \frac{1}{2}e \left( 2 - \frac{1}{e} \right)$$

$$\text{ومنه : } 0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$$

ب- نبين أن  $F: x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0, +\infty]$

✓ لدينا الدالة  $F: x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$  قابلة للإشتقاق على  $[0, +\infty]$

ليكن  $x \in [0, +\infty]$

: لدينا

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \left( \frac{-2 - \ln x}{x} \right)' \\
 &= \frac{(-2 - \ln x) \times x - (-2 - \ln x) \times (x)'}{x^2} \\
 &= \frac{\frac{-1}{x} \times x - (-2 - \ln x)}{x^2} \\
 &= \frac{-1 + 2 + \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{1 + \ln x}{x^2}
 \end{aligned}$$

إذن : لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$

ج- لدينا على المجال  $\left[ \frac{1}{e}, n \right]$

إذن :

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_{\frac{1}{e}}^n f(x) dx \\
 &= \left[ \frac{-2 - \ln x}{x} \right]_{\frac{1}{e}}^n \\
 &= \left( \frac{-2 - \ln(n)}{n} \right) - \left( \frac{-2 - \ln(\frac{1}{e})}{\frac{1}{e}} \right) \\
 &= e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n} = e \quad \text{لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

تصحيح التمرين الخامس

الجزء الأول :

(1) ليكن  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{لدينا } x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$$

إذن من الواضح أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

(2) لدينا الدالة  $u(x) > 0$  :  $u: x \mapsto x^2 - 2x + 2$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

إذن الدالة  $f = \ln(u)$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$

ل يكن  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(x^2 - 2x + 2))' \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 2)'}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} \end{aligned}$$

لدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  إذن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $x^2 - 2x + 2 > 0$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$2x - 2$	-	0	+

إذن على المجال  $[1, +\infty[$  و على المجال  $]-\infty, 1]$

(3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لدينا} \quad \checkmark$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 2x + 2) = +\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لدينا} \quad \checkmark$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 2x + 2) = +\infty$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{لدينا} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 & \text{لحسب } : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

إذن  $(C_f)$  يقبل فرعاً شلجمياً في اتجاه محور الأفاسيل بجوار  $+\infty$

$$\begin{aligned}
 & \text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \checkmark \\
 & \text{لحسب } : \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \frac{\ln(-x)}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

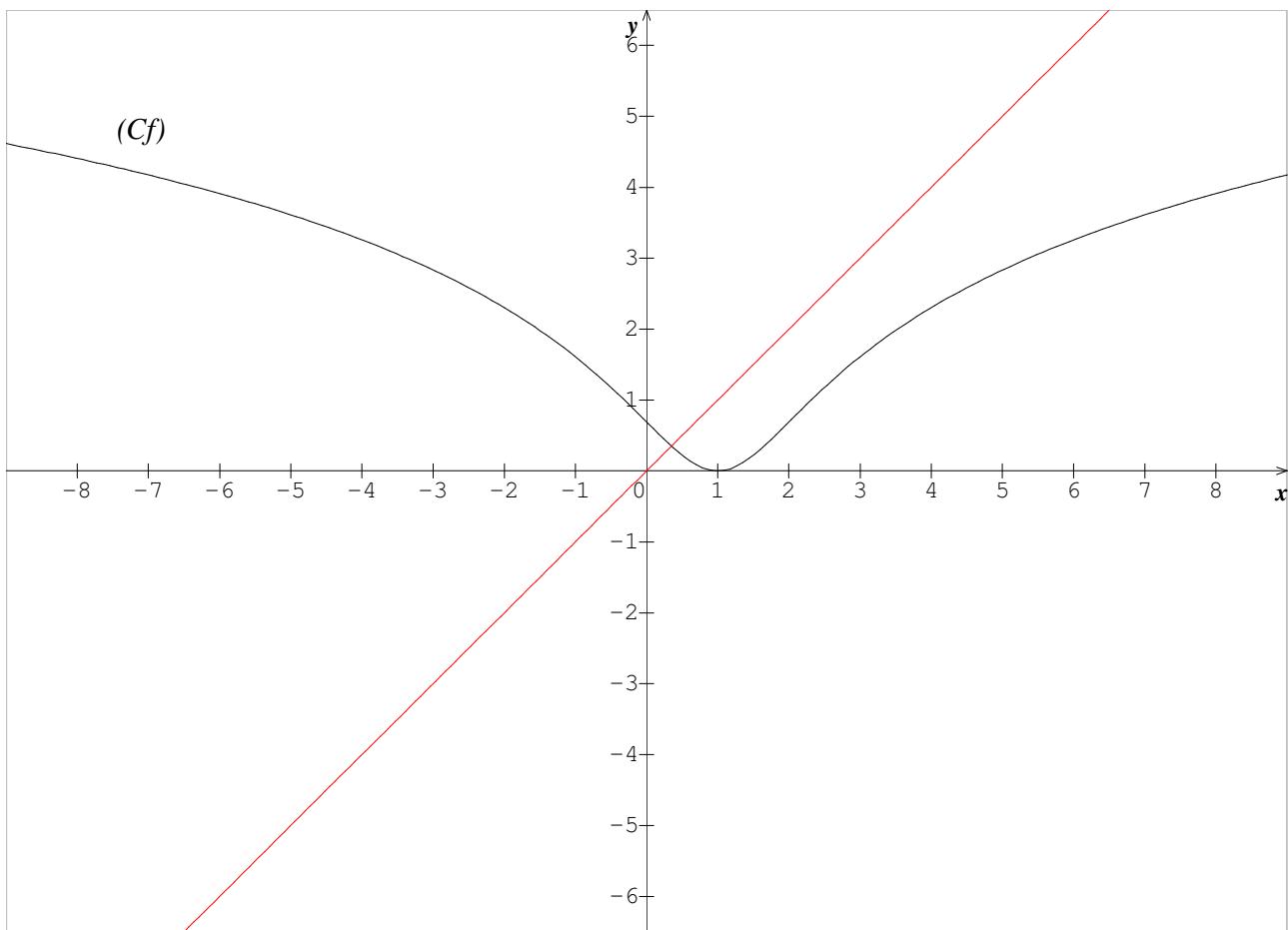
إذن  $(C_f)$  يقبل فرعاً شلجمياً في اتجاه محور الأفاسيل بجوار  $-\infty$

$$\begin{aligned}
 & \text{ل يكن } x \in \mathbb{R} \quad (5) \\
 & 2(1-x) = 2-x \in \mathbb{R} \quad \text{لدينا } \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(2(1)-x) &= f(2-x) \\
 &= \ln((2-x)^2 - 2(2-x) + 2) \\
 &= \ln(4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2) \quad \checkmark \\
 &= \ln(x^2 - 2x + 2) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad 2(1)-x \in \mathbb{R} \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(2(1)-x) = f(x) \end{array} \right.$  إذن:  
 و منه  $(C_f)$  هو محور تماثل ل  $(D)$ :  $x=1$

(6)



الجزء الثاني :

:  $x \in \mathbb{R}$  ليكن (1)

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \\ &= \frac{2x - 2 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{-(x - 2)^2}{x^2 - 2x + 2}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) \leq 0 \\ \varphi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \end{cases} \quad \text{لدينا :} \\ \text{إذن : } \varphi \text{ تناصبية قطعا .}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 2x + 2) - x = +\infty \quad \text{أ - (2)}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 2x + 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

ب- ليكن  $x \in \mathbb{R}$

✓

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= f(x) - x \\
 &= \ln(x^2 - 2x + 2) - x \\
 &= \ln\left(x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right) - x \\
 &= \ln(x^2) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - x \\
 &= 2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - x \\
 &= x \left( \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right) \\
 \varphi(x) &= x \left[ \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right] : x > 0 \quad \text{إذن: لكل } \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right] = -\infty \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

-ج-

$\varphi$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ✓

$\varphi$  تناصصية قطعا على  $\mathbb{R}$  ✓

$$0 \in \varphi(\mathbb{R}) = \varphi([-\infty, +\infty[) = \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \right] = [-\infty, +\infty[ = \mathbb{R} \quad \checkmark$$

إذن المعادلة  $\varphi(x) = 0$  تقبل حل واحدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$

إذن المعادلة  $f(x) = x$  تقبل حل واحدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$

و منه  $y = x$  يقطع  $(C_f)$  في نقطة وحيدة أقصولها  $\alpha$

✓

: لدينا

•  $\varphi$  متصلة على  $[0,3;0,4]$

$$\begin{cases} \varphi(0,3) > 0 \\ \varphi(0,4) < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(0,3) \times \varphi(0,4) < 0$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية :  $0,3 < \alpha < 0,4$

つづく