قانون التركيب الداخلي

تمرين1

نعتبر قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 \quad x*y=xy-3(x+y)+12$$

1- بين أن : $*$ تجميعي و تبادلي

2- بين أن $*$ يقبل عنصرا محايدا ثم حدده

3- حدد عناصر $\mathbb{R}$ التي تقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$

4- بين أن : $E=]3;+\infty[$ جزء مستقر من $(\mathbb{R};*)$

5- بين أن : جميع عناصر $\mathbb{R}-\{3\}$ منتظمة بالنسبة للقانون $*$

الحل

1- لنبين أن : $*$ تجميعي

نعتبر : $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$

$$(x*y)*z=(xy-3(x+y)+12)z-3((xy-3(x+y)+12)+z)+12$$

$$(x*y)*z=xyz-3(xz+yz+xy)+9(x+y+z)-24$$

إذن : $\boxed{(x*y)*z=x*(y*z)}$

و منه : $*$ تجميعي

- لنبين أن : $*$ تبادلي

نعتبر : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

لدينا :

$$x*y=xy-3(x+y)+12$$
$$=yx-3(y+x)+12$$

إذن : $\boxed{x*y=y*x}$

2- لنبين أن $*$ يقبل عنصرا محايدا ثم نحدده

نعتبر : $e\in\mathbb{R}$ بحيث :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad x*e=e*x=x$$

بما أن $*$ تبادلي يكفي تحديد e بحيث : $x*e=x$

$$x*e=x \Leftrightarrow xe-3(x+e)+12=x$$
$$\Leftrightarrow (e-4)(x-3)=0 \; ; \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow e-4=0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{e=4}$$

إذن : $*$ يقبل عنصرا محايدا و هو 4

3- عناصر $\mathbb{R}$ التي تقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$

نعتبر : $x\in\mathbb{R}$

y مماثل لـ x يعني : $x*y=y*x=4$

بما أن $*$ تبادلي يكفي تحديد y بحيث : $x*y=4$

$$x*y=4 \Leftrightarrow xy-3(x+y)+12=4$$
$$\Leftrightarrow y(x-3)=3x-9$$
$$\boxed{x*y=e \Leftrightarrow y=\frac{3x-9}{x-3} \; ; \; x\neq 3}$$

مجموعة عناصر $\mathbb{R}$ التي تقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$

هي : $\mathbb{R}-\{3\}$

4- لنبين أن : $E=]3;+\infty[$ جزء مستقر من $(\mathbb{R};*)$

نعتبر : $y\in E$

نعتبر الدالة : $f_y(x)=xy-3(x+y)+12$

معرفة على $[3;+\infty[$

$$f_y'(x)=y-3$$

بما أن : $y\in E$ فإن : $\forall x\in[3;+\infty[: f_y'(x)>0$

إذن : f_y تزايدية على $[3;+\infty[$

و منه : $f_y(x)\geq f_y(3) \quad \forall x\in E$ و $f_y(3)=4$

إذن : $f_y(x)>3 \quad \forall x\in E$

و منه : $f_y(x)>3 \quad \forall(x;y)\in E^2$

يعني : $\boxed{\forall(x;y)\in E^2 \quad x*y\in E}$

إذن : $E=]3;+\infty[$ جزء مستقر من $(\mathbb{R};*)$

5- لنبين أن : جميع عناصر $\mathbb{R}-\{3\}$ منتظمة بالنسبة للقانون $*$

العنصر a من $\mathbb{R}-\{3\}$ منتظم يعني

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 \begin{cases} a*x=a*y \Rightarrow x=y \\ x*a=y*a \Rightarrow x=y \end{cases}$$

بما أن $*$ تبادلي يكفي البرهنة أن :

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 \quad a*x=a*y \Rightarrow x=y$$

$$a*x=a*y \Leftrightarrow ax-3(a+x)+12=ay-3(a+y)+12$$
$$\Leftrightarrow ax-3x=ay-3y$$
$$\Leftrightarrow (a-3)(x-y)=0 \; ; a\neq 3$$
$$\Leftrightarrow x=y$$

و منه : جميع عناصر $\mathbb{R}-\{3\}$ منتظمة بالنسبة للقانون $*$

تمرين2

1- بين أن : الضرب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ تجميعي

2- بين أن : الضرب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ غير تبادلي

3- بين أن : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

4- بين أن : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ لايقبل مماثلا في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

5- بين أن : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ غير منتظم في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

الحل

2- لنبين أن : الضرب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ غير تبادلي

لدينا :

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

إذن : الضرب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ غير تبادلي

3- لنبين أن : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

لدينا : $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$

و : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$

إذن : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

4- لنبين أن : $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ لايقبل مماثلا في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a+b&c+d\\a+b&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\a+b=0\end{cases};\begin{cases}c+d=1\\c+d=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 1=0$$

و هذا غير ممكن

إذن : $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ لايقبل مماثلا في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

5- لنبين أن : $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ غير منتظم في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

لدينا : $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$

لكن : $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

تمرين3

1- بين أن : الضرب في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ تجميعي

2- بين أن : الضرب في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ غير تبادلي

3- بين أن: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$

4- بين أن : $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ لايقبل مماثلا في $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$

5- بين أن : $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ غير منتظم في $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$

تمرين4

بين أن f تشاكل في كل حالة

-1
$$\begin{aligned}f:(]0;+\infty[;\times)&\to(\mathbb{R};+)\\x&\mapsto\ln x\end{aligned}$$

-2
$$\begin{aligned}f:(\mathbb{R};+)&\to(\mathbb{C}^*;\times)\\x&\mapsto e^{ix}\end{aligned}$$

-3
$$\begin{aligned}f:(\mathscr{P}(E);\cup)&\to(\mathscr{P}(E);\cap)\\X&\mapsto C_E^X\end{aligned}$$

-4
$$\begin{aligned}f:(\mathscr{P}(E);\cap)&\to(\mathscr{P}(E);\cup)\\X&\mapsto C_E^X\end{aligned}$$

-5
$$\begin{aligned}f:(\mathbb{R};+)&\to(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)\\x&\mapsto\begin{pmatrix}\cos x&-\sin x\\\sin x&\cos x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

احسب : $\begin{pmatrix}\cos x&-\sin x\\\sin x&\cos x\end{pmatrix}^n$

الحل

-1
$$\begin{aligned}f:(]0;+\infty[;\times)&\to(\mathbb{R};+)\\x&\mapsto\ln x\end{aligned}$$

نعتبر : $(x;y)\in\,]0;+\infty[^2$

$$f(xy)=\ln(xy)$$
$$=\ln x+\ln y$$
$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

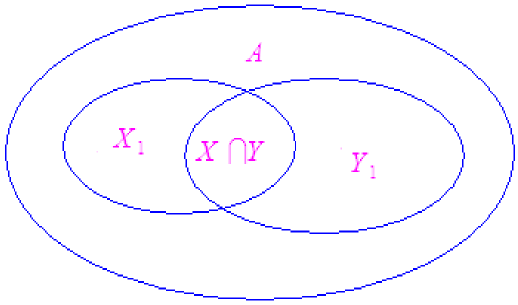
إذن : f تشاكل من $(]0;+\infty[;\times)$ نحو $(\mathbb{R};+)$

-3
$$\begin{aligned}f:(\mathscr{P}(E);\cup)&\to(\mathscr{P}(E);\cap)\\X&\mapsto C_E^X\end{aligned}$$

نعتبر : $(X;Y)\in\mathscr{P}(E)^2$

$$f(X \cup Y) = C_E^{X\cup Y}$$
$$= E-(X\cup Y)$$
$$=(E-X)\cap(E-Y)$$
$$=C_E^X \cap C_E^Y$$
$$f(X\cup Y)=f(X)\cap f(Y)$$

إذن : f تشاكل من $(\mathscr{P}(E);\cup)$ نحو $(\mathscr{P}(E);\cap)$



$$E-(X\cup Y)=A$$
$$E-X = A\cup Y_1$$
$$E-Y = A\cup X_1$$
$$(A\cup Y_1)\cap(A\cup X_1)=A$$

إذن : $\boxed{E-(X\cup Y)=(E-X)\cap(E-Y)}$

-4 $f:(\mathscr{P}(E);\cap)\to(\mathscr{P}(E);\cup)$
$$X \mapsto C_E^X$$

نعتبر : $(X;Y)\in\mathscr{P}(E)^2$

$$f(X\cap Y)=C_E^{X\cap Y}$$
$$=E-(X\cap Y)$$
$$=(E-X)\cup(E-Y)$$
$$=C_E^X\cup C_E^Y$$
$$f(X\cap Y)=f(X)\cup f(Y)$$

إذن : f تشاكل من $(\mathscr{P}(E);\cap)$ نحو $(\mathscr{P}(E);\cup)$

-5 $f:(\mathbb{R};+)\to(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$
$$x \mapsto \begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$$

نعتبر : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}$$
$$\boxed{f(x+y)=f(x)\times f(y)}$$

إذن : f تشاكل من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

من : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

نبين بالترجع أن : $f(nx)=(f(x))^n$

إذن : $\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos nx & -\sin nx\\ \sin nx & \cos nx\end{pmatrix}$

تمرين5

* قانون تركيب داخلي في G بحيث :
* تجميعي ، يقبل عنصرا محايدا e ، جميع عناصر G تقبل مماثلا في $(G;*)$ (مماثل a هو a^{-1})

نعتبر التطبيق : $f:G\to\mathscr{F}$
$$a\mapsto f_a$$

f_a معرف بما يلي : $f_a:G\to G$
$$x\mapsto a*x*a^{-1}$$

-1 بين أن : $\forall(a;b)\in G^2 \quad f_a\circ f_b=f_{a*b}$

-2 نعتبر : $F=\{f_a\ /a\in G\}$

أ – بين أن : $\circ$ قانون تركيب داخلي في F تجميعي ، يقبل عنصرا محايدا ، جميع عناصر F تقبل مماثلا في $(F;\circ)$

ب- بين أن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

الحل

-1 لنبين أن : $\forall(a;b)\in G^2 \quad f_a\circ f_b=f_{a*b}$

نعتبر : $x\in G$

$$f_a\circ f_b(x)=a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}$$

بما أن : * تجميعي و $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$

فإن : $a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}=(a*b)*x*(a*b)^{-1}$

إذن : $\forall x\in G \quad f_a\circ f_b(x)=f_{a*b}(x)$

و منه : $\boxed{\forall(a;b)\in G^2 \quad f_a\circ f_b=f_{a*b}}$

-2 نعتبر : $F=\{f_a\ /a\in G\}$

أ – لنبين أن : $\circ$ قانون تركيب داخلي في F

من -1 : $\forall(a;b)\in G^2 \quad f_a\circ f_b=f_{a*b}$

وبما أن : * قانون تركيب داخلي في G

فإن : $a*b\in G$

إذن : $f_{a*b}\in F$

و منه : $f_a\circ f_b\in F$

إذن : $\circ$ قانون تركيب داخلي في F

– لنبين أن : $\circ$ تجميعي

نعتبر : $(a;b;c)\in G^3$

بما أن : $*$ قانون تركيب داخلي في G

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

$$\begin{aligned}(f_a\circ f_b)\circ f_c &= f_{a*b}\circ f_c\\ &= f_{(a*b)*c}\\ &= f_{a*(b*c)}\\ &= f_a\circ f_{(b*c)}\end{aligned}$$

$$\boxed{(f_a\circ f_b)\circ f_c = f_a\circ(f_b\circ f_c)}$$

إذن : $\circ$ تجميعي في F

– لنبين أن : $\circ$ يقبل عنصرا محايدا

نعتبر : $a\in G$

لدينا : $f_a\circ f_e=f_{a*e}=f_a$ و $f_e\circ f_a=f_{e*a}=f_a$

إذن : $\circ$ يقبل عنصرا محايدا و هو f_e

– لنبين أن : جميع عناصر F تقبل مماثلا في $(F;\circ)$

نعتبر : $a\in G$ و $a^{-1}\in G$ مماثل a

لدينا : $f_a\circ f_{a^{-1}}=f_{a*a^{-1}}=f_e$ و $f_{a^{-1}}\circ f_a=f_{a^{-1}*a}=f_e$

إذن : مماثل f_a هو $f_{a^{-1}}$

و منه : جميع عناصر F تقبل مماثلا في $(F;\circ)$

ب- بين أن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

نعتبر : $(a;b)\in G^2$

لدينا : $f(a*b)=f_{a*b}$

إذن : $f(a*b)=f_a\circ f_b$

إذن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

تمرين6

نعتبر :

$$E=\left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^2;(a;b)\neq(0;0)\right\}$$

نعتبر التطبيق :

$$f:\begin{array}{l} E \to \mathbb{C}^*\\ \begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\mapsto a+ib\end{array}$$

1 - بين أن : f تقابل

2- بين أن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

3- استنتج خاصيات $(E;\times)$

الحل

1 - لنبين أن : f تقابل

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix};\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$f\left(\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow a+ib=c+id$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}}$$

إذن : f تباين (a)

نعتبر : $c+id\in\mathbb{C}^*$

لنحدد : $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\in E$ بحيث : $f\left(\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=c+id$

$$f\left(\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=c+id\Leftrightarrow a+ib=c+id$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=c+id\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$$

إذن : f شمولي (b)

من : (a) و (b) : f تقابل

2- بين أن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

$$f\left(\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}ac-bd & -(bc+ad)\\ bc+ad & ac-bd\end{pmatrix}$$

$$=(ac-bd)+i(bc+ad)$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)=(a+bi)(c+di)}$$

إذن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

3- استنتج خاصيات $(E;\times)$

بما أن : f تشاكل تقابلي من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

فإن : f^{-1} تشاكل من $(\mathbb{C}^*;\times)$ نحو $(E;\times)$

و بما أن : $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{C}^*$

$\times$ تجميعي تبادلي ، يقبل عنصرا محايدا 1 ، جميع عناصر $\mathbb{C}^*$ تقبل مماثلا في $(\mathbb{C}^*;\times)$

(مماثل $a+ib$ هو $\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$)

فإن : $\times$ قانون تركيب داخلي في E

$\times$ تجميعي تبادلي ، يقبل عنصرا محايدا $f^{-1}(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ،

جميع عناصر E تقبل مماثلا في $(E;\times)$

(مماثل $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ هو $\begin{pmatrix}\frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2}\\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2}\end{pmatrix}$)

الزمرة – الحلقة - الجسم

تمرين 1

نعتبر : $E =]-1;1[$

ليكن : $(x;y)\in E^2$

نضع : $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$

1- بين أن : * قانون تركيب داخلي في E

2- بين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

الحل

1- لنبين أن : * قانون تركيب داخلي في E

نعتبر : $y\in E$

نعتبر الدالة : $f_y(x)=\dfrac{x+y}{1+xy}$ معرفة على $E=]-1;1[$

$$f_y'(x)=\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$$

بما أن : $y\in]-1;1[$ فإن : $\forall x\in]-1;1[\; : f_y'(x)>0$

إذن : f_y تزايدية على $]-1;1[$

$$f_y(]-1;1[)=]-1;1[$$

و منه : $f_y(x)\in E \quad \forall x\in E \;;\; \forall y\in E$

يعني : $\boxed{\forall(x;y)\in E^2 \quad x*y\in E}$

إذن : * قانون تركيب داخلي في E

2- لنبين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

أ- لنبين أن : * تجميعي

نعتبر : $(x;y;z)\in E^3$

$$(x*y)*z=\frac{x+y}{1+xy}*z$$

$$=\frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}\times z}$$

$$(x*y)*z=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

كذلك : $x*(y*z)=\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$

إذن : $\boxed{(x*y)*z=x*(y*z)}$

و منه : * تجميعي

ب- لنبين أن : * تبادلي

نعتبر : $(x;y)\in E^2$

لدينا :

$$x*y=\frac{x+y}{1+xy}$$

$$=\frac{y+x}{1+yx}$$

إذن : $\boxed{x*y=y*x}$

و منه : * تبادلي

ج- لنبين أن * يقبل عنصرا محايدا ثم نحدده

نعتبر : $e\in E$ بحيث :

بحيث : $\forall x\in E \quad x*e=e*x=x$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد e بحيث : $x*e=x$

$$x*e=x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe}=x$$
$$\Leftrightarrow x+e=x+x^2e;\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow e=x^2e$$
$$\Leftrightarrow e\left(1-x^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e\left(1-x^2\right)=0;\ \forall x\in E$$
$$\Leftrightarrow \boxed{e=0}$$

إذن : * يقبل عنصرا محايدا و هو 0

د- لنبين أن جميع عناصر E تقبل مماثلا بالنسبة للقانون * في E

نعتبر : $x\in E$

y مماثل ل x يعني : $x*y=y*x=0$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد y بحيث : $x*y=0$

$$x*y=0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy}=0$$
$$\Leftrightarrow x+y=0$$
$$\Leftrightarrow y=-x$$

بما أن : $-x\in E$

إذن : جميع عناصر E تقبل مماثلا بالنسبة للقانون * في E

إذن : من - أ- ب – ج – د - $(E;*)$ زمرة تبادلية

تمرين2

نعتبر : $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2-y^2=1\right\}$

ليكن : $(x;y)\in E^2$ و $(x';y')\in E^2$

نضع : $(x;y)*(x';y')=(xx'+yy';xy'+yx')$

1- بين أن : * قانون تركيب داخلي في E

2- بين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

الحل

1- * قانون تركيب داخلي في E (الحساب)

2- التجميعية و التبادلية évident

العنصر المحايد :

$$(x;y)*(e_x;e_y)=(xe_x+ye_y;xe_y+ye_x)=(x;y)$$

$$\begin{cases}xe_x+ye_y=x\\xe_y+ye_x=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2e_x+xye_y=x^2\\xye_y+y^2e_x=y^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}e_x\left(x^2-y^2\right)=x^2-y^2\\xe_x+ye_y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e_x=1\\x+ye_y=x\end{cases}$$

$$\begin{cases}e_x=1\\e_y=0\end{cases}$$

إذن : $(1;0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة * في E

مماثل $(x;y)$

أ- $x\neq 0$

$$(xx'+yy';xy'+yx')=(1;0)$$

$$\begin{cases}xx'+yy'=1\\xy'+yx'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2x'+xyy'=x\\xyy'+y^2x'=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x'\left(x^2-y^2\right)=x\\xy'+yx'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=x\\xy'+yx=0\quad x\neq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$$

مماثل $(x;y)$ هو $(x;-y)$

ب- الحالة : $x=0$ إذن : $y=1$ أو $y=-1$

$$(xx'+yy';xy'+yx')=(1;0)$$

$$\begin{cases}yy'=1\\yx'=0\quad y\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'=\dfrac{1}{y}\\x'=0\end{cases}$$

مماثل $(0;1)$ هو $(0;1)$ و مماثل $(0;-1)$ هو $(0;-1)$

تمرين3

$(G;\times)$ زمرة غيرتبادلية (العنصرالمحايدا هو e)

(مماثل a هو a^{-1})

نعتبر : $C=\left\{a\in G\ /\ \forall x\in G\quad xa=ax\right\}$

بين أن : $(C;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

الحل

لنبين أن : $\forall(a;b)\in C\quad ab^{-1}\in C$

نعتبر : $x\in G$

$$ab^{-1}x=a\left(x^{-1}b\right)^{-1}$$

$$b\in C\Rightarrow x^{-1}b=bx^{-1}$$

$$ab^{-1}x=a\left(bx^{-1}\right)^{-1}=axb^{-1}$$

$$a\in C\Rightarrow ax=xa$$

$$\forall(a;b)\in C\quad \forall x\in G\quad ab^{-1}x=xab^{-1}$$

إذن : $\boxed{\forall(a;b)\in C\quad ab^{-1}\in C}$

ومنه : $(C;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

لدينا : $1_G\in C$ لأن : $x1_G=1_Gx$ $\forall x\in G$

إذن : $C\neq\varnothing$

تمرين 4

$(G;\times)$ زمرة $\quad a\in G$

نعتبر : $H_a=\{x\in G \ / \ xa=ax\}$

بين أن : $(H_a;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

الحل

لنبين أن : $\forall(x;y)\in H_a^2 \quad xy^{-1}\in H_a$

$$x\in H_a \Leftrightarrow xa=ax \Leftrightarrow a^{-1}x=xa^{-1}$$

$$y\in H_a \Leftrightarrow ya=ay \Leftrightarrow a^{-1}y=ya^{-1}$$

$$xy^{-1}a=x\left(a^{-1}y\right)^{-1}=x\left(ya^{-1}\right)^{-1}=xay^{-1}=axy^{-1}$$

إذن : $\forall(x;y)\in H_a^2 \quad xy^{-1}a=axy^{-1}$

ومنه : $\forall(x;y)\in H_a^2 \quad xy^{-1}\in H_a$

إذن : $(H_a;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

تمرين5

نعتبر :

$$E=\left\{\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix} \ / \ x\in\mathbb{R}\right\}$$

نعتبر التطبيق :

$$f:(\mathbb{R};+)\to(E;\times)$$
$$x\mapsto\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$$

1- بين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2- بين أن : f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

3- استنتج بنية المجموعة $(E;\times)$

4- نعتبر : $M=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$

احسب : $M^2\ ;\ M^3$ ثم استنتج M^n

الحل

1- لنبين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}$$

و $\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}\in E$

إذن : $\forall\left(\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}\in E$$

و منه : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2- لنبين أن : f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

نعتبر : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(x+y)=f(x)\times f(y)}$$

إذن : f تشاكل من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

و لدينا : $\forall\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\in E\ \exists x\in\mathbb{R}/f(x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$

f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(E;\times)$

بما أن : f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

و $(\mathbb{R};+)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E;\times)$ زمرة تبادلية

4- نعتبر : $M=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$

حساب : $M^2\ ;\ M^3$ ثم استنتاج M^n

من : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

نبين بالترجع أن : $f(nx)=\left(f(x)\right)^n$

إذن : $\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos nx & -\sin nx\\ \sin nx & \cos nx\end{pmatrix}$

تمرين6

نعتبر :

$$E=\left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix} \ / \ (a;b)\in\mathbb{R}^2;(a;b)\neq(0;0)\right\}$$

نعتبر التطبيق :

$$f: E \to \mathbb{C}^*$$
$$\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix} \mapsto a+ib$$

1- بين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2 - بين أن : f تقابل

3- بين أن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

4- استنتج بنية المجموعة $(E;\times)$

الحل

1- لنبين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix};\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad)\\ bc+ad & ac-bd\end{pmatrix}$$

و $\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad)\\ bc+ad & ac-bd\end{pmatrix}\in E$

إذن : $\forall\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix};\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\in E$$

ومنه : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2 - لنبين أن : f تقابل

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix};\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow a+ib=c+id\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}}$$

إذن : f تباين (a)

نعتبر : $c+id\in\mathbb{C}^*$

لنحدد : $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\in E$ بحيث : $f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=c+id$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=c+id\Leftrightarrow a+ib=c+id$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=c+id\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$$

إذن : f شمولي (b)

من : (a) و (b) : f تقابل

3- بين أن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad)\\ bc+ad & ac-bd\end{pmatrix}$$
$$=(ac-bd)+i(bc+ad)$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)=(a+bi)(c+di)}$$

إذن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

4- استنتاج بنية المجموعة $(E;\times)$

بما أن : f تشاكل تقابلي من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

فإن : f^{-1} تشاكل من $(\mathbb{C}^*;\times)$ نحو $(E;\times)$

و بما أن : $(\mathbb{C}^*;\times)$ زمرة

فإن : $(E;\times)$ زمرة

ملاحظة

(مماثل $a+ib$ في $(\mathbb{C}^*;\times)$ هو $\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$)

(مماثل $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ في $(E;\times)$ هو $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2}\\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2}\end{pmatrix}$)

العنصر المحايد في $(\mathbb{C}^*;\times)$ هو 1

العنصر المحايد في $(E;\times)$ هو $f^{-1}(1)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

تمرين7

$(G;*)$ زمرة العنصر المحايد هو e (مماثل a هو a^{-1})

التطبيق f_a معرف بما يلي :

$$f_a: G\to G$$
$$x\mapsto a*x*a^{-1}$$

نعتبر : $F=\{f_a\ /\ a\in G\}$

نعتبر التطبيق :

$$f: G\to F$$
$$a\mapsto f_a$$

1- بين أن $(F;\circ)$ جزء مستقر من $(\mathscr{F};\circ)$

2- بين أن : f تشاكل شمولي من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

3 - استنتج بنية المجموعة $(F;\circ)$

الحل

1 - لنبين أن : $(F;\circ)$ جزء مستقر من $(\mathcal{F};\circ)$

يعني : $\forall(a;b)\in G^2 \quad f_a\circ f_b\in F$

نعتبر : $x\in G$

$f_a\circ f_b(x)=a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}$

بما أن : $*$ تجميعي و $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$

فإن : $a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}=(a*b)*x*(a*b)^{-1}$

إذن : $\forall x\in G \quad f_a\circ f_b(x)=f_{a*b}(x)$

و منه : $\boxed{\forall(a;b)\in G^2 \ \ f_a\circ f_b=f_{a*b}}$

وبما أن : $*$ قانون تركيب داخلي في G

فإن : $a*b\in G$

إذن : $f_{a*b}\in F$

و منه : $f_a\circ f_b\in F$

إذن : $\forall(a;b)\in G^2 \ \ f_a\circ f_b\in F$

و منه : $(F;\circ)$ جزء مستقر من $(\mathcal{F};\circ)$

2- لنبين أن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

نعتبر : $(a;b)\in G^2$

لدينا : $f(a*b)=f_{a*b}$

إذن : $f(a*b)=f_a\circ f_b$

إذن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$ $\quad(a)$

- لنبين أن : f شمولي

لدينا : $\forall f\in F \ \ \exists a\in E \ \ f(a)=f_a$

إذن : f شمولي (b)

ومن : (a) و (b)

f تشاكل شمولي من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(F;\circ)$

بما أن : f تشاكل شمولي من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

و $(G;*)$ زمرة

فإن : $(F;\circ)$ زمرة

ملاحظة

العنصر المحايد في $(G;*)$ هو e

العنصر المحايد في $(F;\circ)$ هو $f(e)=f_e$

مماثل a في $(G;*)$ هو a^{-1}

مماثل f_a في $(F;\circ)$ هو $f(a^{-1})=f_{a^{-1}}$

تمرين 8

بين أن : $(\mathbb{Z}^2;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

بحيث : $\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ و $\forall(x';y')\in\mathbb{Z}^2$

$$(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$$

$$(x;y)\times(x';y')=(xx'+2yy';xy'+yx')$$

الحل

أ- $(\mathbb{Z}^2;+)$ زمرة تبادلية (واضح)

صفر $(\mathbb{Z}^2;+)$ هو $(0;0)$ مماثل $(x;y)$ هو $(-x;-y)$ في $(\mathbb{Z}^2;+)$

ب - $\times$ تجميعي في $\mathbb{Z}^2$ (الحساب)

ج - $\times$ تبادلي في $\mathbb{Z}^2$ (الحساب)

د - وحدة $(\mathbb{Z}^2;\times)$ هي $(1;0)$

هـ - القانون $\times$ تو زيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathbb{Z}^2$

بما أن $\times$ تبادلي في $\mathbb{Z}^2$

نكتفي بالبرهنة أن :

$\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ و $\forall(x';y')\in\mathbb{Z}^2$ و $\forall(x'';y'')\in\mathbb{Z}^2$

$$(x;y)\times\big((x';y')+(x'';y'')\big)=\big((x;y)\times(x';y')\big)+\big((x;y)\times(x'';y'')\big)$$

(كذلك الحساب)

من (أ - ب – ج – د - هـ) $(\mathbb{Z}^2;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

تمرين9

1- بين أن : $1+j+j^2=0$ بحيث : $j=e^{2i\frac{\pi}{3}}$

2- نعتبر : $E=\{z\in\mathbb{C}/\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2 \ : \ z=a+bj\}$

بين أن : $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

الحل

أ- $(E;+)$ زمرة تبادلية (واضح)

طريقة البرهنة أن : $(E;+)$ زمرة تبادلية

نبين أن : $(E;+)$ زمرة تبادلية مباشرة

أو من الأحسن نبين أن : $(E;+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C};+)$

و بما أن : $(\mathbb{C};+)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E;+)$ زمرة تبادلية

ب - $\times$ قانون تركيب داخلي في E (الحساب و العلاقة $1+j+j^2=0$)

بما أن $(\mathbb{C};+;\times)$ جسم تبادلي و $E\subset\mathbb{C}$ و $\times$ قانون تركيب داخلي في E

فإن : ج - $\times$ تجميعي في في E (الحساب)

د - $\times$ تبادلي في في E (الحساب)

ج - وحدة $(E;\times)$ هي 1

هـ - القانون $\times$ تو زيعي بالنسبة للقانون $+$ في E

من (أ- ب – ج – د – هـ) $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

تمرين 10

بين أن : $(\mathbb{R};*;\mathrm{T})$ جسم تبادلي

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad \begin{cases} x*y=x+y-1\\ x\mathrm{T}y=x+y-xy\end{cases}$$

الحل

أ - $(\mathbb{R};*)$ زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في $(\mathbb{R};*)$ هو 1

ب- $(\mathbb{R}-\{1\};\mathrm{T})$ زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في $(\mathbb{R};\mathrm{T})$ هو 0

ج - القانون T توزيعي بالنسبة للقانون $*$ في $\mathbb{R}$ (الحساب)

بما أن T تبادلي في $\mathbb{R}$

نكتفي بالبرهنة أن :

$$\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\quad x\mathrm{T}(y*z)=(x\mathrm{T}y)*(x\mathrm{T}z)$$

من (أ- ب – ج) $(\mathbb{R};*;\mathrm{T})$ جسم تبادلي

تمرين 11

نعتبر :

$$\mathbb{K}=\left\{\begin{pmatrix} x & y\\ -5y & x+2y\end{pmatrix}\ /\ (x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

بين أن : $(\mathbb{K};+;\times)$ جسم تبادلي

الحل

1- $(\Bbbk;+)$ زمرة تبادلية (الطريقة)

- بما أن : $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$ زمرة تبادلية و $\Bbbk\subset\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

يكفي ان نبين أن : $(\Bbbk;+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$

و منه : $(\Bbbk;+)$ زمرة تبادلية

العنصر المحايد في $(\Bbbk;+)$ هو $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}$

2- $\left(\Bbbk-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\};\times\right)$ زمرة تبادلية (الطريقة)

أ- $\times$ قانون تركيب داخلي في $\Bbbk$ (الحساب)

$$\begin{pmatrix} x & y\\ -5y & x+2y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b\\ -5b & a+2b\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} xa-5yb & xb+ya+2yb\\ -5(xb+ya+2yb) & (xa-5yb)+2(xb+ya+2yb)\end{pmatrix}$$

ب - $\times$ تبادلي في $\Bbbk-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$ (الحساب)

- بما أن $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ حلقة واحدية و $\Bbbk\subset\mathbb{C}$ و $\times$ قانون تركيب داخلي في $\Bbbk$

فإن : ج- $\times$ تجميعي في $\Bbbk-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$

د- وحدة $\left(\Bbbk-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\};\times\right)$ هي $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}$

هـ - لنبين أن جميع عناصر $\Bbbk-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$ تقبل مماثلا في $\Bbbk-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$

بما أن $\times$ تبادلي في $\Bbbk-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$

نكتفي بتحديد : $\begin{pmatrix} x & y\\ -5y & x+2y\end{pmatrix}\in\Bbbk-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$

بحيث : $\begin{pmatrix} x & y\\ -5y & x+2y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b\\ -5b & a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

نجد : $\begin{cases} xa-5yb=1\\ xb+ya+2yb=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ax-5by=1\\ bx+(a+2b)y=0\end{cases}$

$$5b^2+2ab+a^2\neq0$$

لأن : $\Delta_b'=-4a^2<0$ و $\Delta_a'=-4b^2<0$

حل النظمة نجد : $\begin{cases} x=\dfrac{a+2b}{5b^2+2ab+a^2}\\ y=\dfrac{-b}{5b^2+2ab+a^2}\end{cases}$

من (أ- ب – ج – د – هـ) $\left(\Bbbk-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\};\times\right)$ زمرة تبادلية

3- القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\Bbbk$

بما أن $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ حلقة واحدية و $\Bbbk\subset\mathbb{C}$ و $\times$ قانون تركيب داخلي في $\Bbbk$ فإن القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\Bbbk$

من (1- 2 – 3) $(\mathbb{K};+;\times)$ جسم تبادلي

تمرين 12 (الإستدراكية 2003)

نعتبر : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt2\\ b\sqrt2 & a\end{pmatrix}\ /\ (a;b)\in\mathbb{Z}^2$

$$E=\left\{M_{(a;b)}\ /\ a^2-2b^2=1\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt2\\ 2\sqrt2 & 3\end{pmatrix}$$

1 – تحقق أن : $A\in E$

2- بين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

و أن قانون التركيب الداخلي $\times$ تبادلي في E

3- بين أن : جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$

4- بين أن : $(E;\times)$ زمرة تبادلية

الفضاءات المتجهية الحقيقية

تمرين1

I مجموعة الدوال العددية الفردية المعرفة على $\mathbb{R}$

P مجموعة الدوال العددية الزوجية المعرفة على $\mathbb{R}$

1- بين أن : $(I;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2- بين أن : $(P;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

الحل

1- لنبين أن : $(I;*;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

الطريقة 1 (تعريف فضاء متجهي حقيقي)

أ- نبين أن : $(I;+)$ زمرة تبادلية

لنبين أن : $(I;+)$ زمرة جزئية من $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+)$

نعتبر $(u;v)\in I^2$ و نبين أن $u-v\in I$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$(u-v)(-x)=u(-x)-v(-x)$$
$$=-u(x)+v(x)$$
$$=-(u(x)-v(x))$$
$$\boxed{(u-v)(-x)=-(u-v)(x)}$$

إذن : $\forall(u;v)\in I^2\ u-v\in I$

إذن : $(I;+)$ زمرة جزئية من $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+)$

و بم أن : $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+)$ زمرة تبادلية

فإن : $(I;+)$ زمرة تبادلية

ب- نعتبر : $(u;v)\in I^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

1- نبين أن : $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

$$(\alpha+\beta)u(x)=\alpha u(x)+\beta u(x)$$
$$(\alpha+\beta)u(x)=(\alpha u+\beta u)(x)$$

إذن : $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

2- نبين أن : $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

$$(\alpha\beta)u(x)=\alpha(\beta u(x))$$
$$(\alpha\beta)u(x)=\alpha(\beta u)(x)$$

إذن : $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

3- نبين أن : $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

4- نبين أن : $1u=u$

استنتاج

من- أ – و- ب - : $(I;*;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

الطريقة 2 (الفضاء المتجهي الجزئي)

نبين أن : $(I;*;\bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

$(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\bullet)$

$I\neq\varnothing$ لأن : $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\in I$ (1)

نعتبر : $(u;v)\in I^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

و نبين أن : $(\alpha u+\beta v)\in I$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$(\alpha u+\beta v)(-x)=\alpha u(-x)+\beta v(-x)$$
$$=-\alpha u(x)-\beta v(x)$$
$$(\alpha u+\beta v)(-x)=-(\alpha u+\beta v)(x)$$

إذن :

$$(2)\ \left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(u;v)\in I^2\right):(\alpha u+\beta v)\in I$$

و من (1) و (2) : $(I;*;\bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

$(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\bullet)$

و بالتالي : $(I;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2- نبين أن: $(P;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : $(P;+;\bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

$(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\bullet)$

$P\neq\varnothing$ لأن : $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\in P$ (1)

نعتبر : $(u;v)\in P^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

و نبين أن : $(\alpha u+\beta v)\in P$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$(\alpha u+\beta v)(-x)=\alpha u(-x)+\beta v(-x)$$
$$=\alpha u(x)+\beta v(x)$$
$$(\alpha u+\beta v)(-x)=(\alpha u+\beta v)(x)$$

إذن :

$$(2)\ \left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(u;v)\in P^2\right):(\alpha u+\beta v)\in P$$

و من (1) و (2) : $(P;+;\bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

$(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\bullet)$

و بالتالي : $(P;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

تمرين2

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\bullet)$

اكتب : $M=\begin{pmatrix}2&-7\\10&5\end{pmatrix}$ كتأليفة خطية ل

$M_1=\begin{pmatrix}1&4\\0&5\end{pmatrix}$ و $M_2=\begin{pmatrix}0&3\\-2&1\end{pmatrix}$

الحل

لدينا : $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

إذن : $M = 2M_1 - 5M_2$

تمرين3

بين أن : $\big((2;3);(-1;5)\big)$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $\left(\mathbb{R}^2;+;\cdot\right)$

الحل

لنبين أن : $\big((2;3);(-1;5)\big)$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $\left(\mathbb{R}^2;+;\cdot\right)$

نعتبر : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$(x;y)=\alpha(2;3)+\beta(-1;5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+3\beta=x \\ -1\alpha+5\beta=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{5x-3y}{13} \\ \beta=\dfrac{x+2y}{13} \end{cases}$$

إذن :

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ \exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2 : (x;y)=\alpha(2;3)+\beta(-1;5)$$

بحيث : $\alpha=\dfrac{5x-3y}{13}\ ;\ \beta=\dfrac{x+2y}{13}$

و منه : $\big((2;3);(-1;5)\big)$ أسرة مولد ل $\left(\mathbb{R}^2;+;\cdot\right)$

تمرين4

في الفضاء المتجهي الحقيقي $\left(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot\right)$

بين أن : $B=\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ أسرة حرة

الحل

نعتبر : $(\alpha;\beta;\gamma)\in\mathbb{R}^3$

بحيث : $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ثم نبين أن : $\alpha=\beta=\gamma=0$

لدينا : $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

إذن : $\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha+\gamma \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ومنه : $\alpha=\beta=\gamma=0$

B أسرة حرة

تمرين5

في الفضاء المتجهي الحقيقي $\left(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot\right)$

بين أن : $B=\left(1;\cos^2 x;\cos 2x\right)$ أسرة مقيدة

الحل

لدينا : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

إذن : B أسرة مقيدة

تمرين6

1- في الفضاء المتجهي الحقيقي $\left(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot\right)$

بين أن : $B=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

أساس في $\left(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot\right)$ ثم استنتج بُعْدَ $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

2- في الفضاء المتجهي الحقيقي $\left(\mathbb{R}^2;+;\cdot\right)$

بين أن : $B=\big((1;0);(0;1)\big)$ أساس في $\left(\mathbb{R}^2;+;\cdot\right)$

ثم استنتج بُعْدَ $\mathbb{R}^2$

3- في الفضاء المتجهي الحقيقي $\left(\mathscr{P}_2;+;\cdot\right)$

بين أن : $B=\left(1;x;x^2\right)$ أساس في $\left(\mathscr{P}_2;+;\cdot\right)$

ثم استنتج بُعْدَ $\mathscr{P}_2$

الحل

1- أ - نبين أن : B أسرة مولد ة ل $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

نعتبر : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : B أسرة مولد ة ل $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

ب - نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$

بحيث : $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ثم نبين أن : $a=b=c=d=0$

لدينا : $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

إذن: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و منه : $a=b=c=d=0$

إذن : B أسرة حرة

ومن أ- ب : B أساس للفضاء المتجهي $\left(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot\right)$

إذن : $\dim\mathbb{M}_2(\mathbb{R})=cardB$

$$\boxed{\dim\mathbb{M}_2(\mathbb{R})=4}$$

2- أ - نبين أن : B أسرة مولد ة ل $\mathbb{R}^2$

نعتبر : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

$$(a;b)=a(1;0)+b(0;1)$$

إذن : B أسرة مولدة لـ $\mathbb{R}^2$

ب - نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

بحيث : $a(1;0)+b(0;1)=(0;0)$

ثم نبين أن : $a=b=0$

لدينا : $a(1;0)+b(0;1)=(0;0)$

إذن : $(a;b)=(0;0)$

و منه : $a=b=0$

إذن : B : أسرة حرة

ومن أ- ب : B أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

إذن : $\dim\mathbb{R}^2=cardB$

$$\boxed{\dim\mathbb{R}^2=2}$$

2- أ - نبين أن : B أسرة مولدة لـ $\mathscr{P}_2$.

نعتبر : $(ax^2+bx+c)\in\mathscr{P}_2$

$$ax^2+bx+c=a(x^2)+b(x)+c(1)$$

إذن : B أسرة مولدة لـ $\mathscr{P}_2$

ب - نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

بحيث : $ax^2+bx+c=0$

ثم نبين أن : $a=b=c=0$

لدينا : $ax^2+bx+c=0$

إذن : $a=b=c=0$

و منه : B أسرة حرة

ومن أ- ب : B أساس للفضاء المتجهي $(\mathscr{P}_2;+;\bullet)$

إذن : $\dim\mathscr{P}_2=cardB$

$$\boxed{\dim\mathscr{P}_2=3}$$

تمرين7

$$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=0\}$$

1- بين أن : $(F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2- حدد أساسا لـ F ثم استنتج بُعْدَه

الحل

1- لنبين أن : F فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

$F\neq\varnothing$ لأن : $(0;0)\in F$ (1)

نعتبر : $((x;y);(x';y'))\in F^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

نبين : $\alpha(x;y)+\beta(x';y')\in F$

$$\alpha(x;y)+\beta(x';y')=(\alpha x+\beta x';\alpha y+\beta y')$$

$$(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')=\alpha(x+y)+\beta(x'+y')$$

$$(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')=0$$

إذن :

$$(2)\quad \forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\ \forall((x;y);(x';y'))\in F^2:\alpha(x;y)+\beta(x';y')\in F$$

و منه (1) و (2) :

F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

و منه : F فضاء متجهي حقيقي

2- حدد أساسا لـ F ثم استنتج بُعْدَه

نعتبر : $(x;y)\in F$ إذن : $y=-x$

ومنه : $(x;y)=(x;-x)$

$$(x;y)=x(1;-1)$$

إذن : $B=((1;-1))$ أسرة مولدة لـ F

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $a\in\mathbb{R}$ بحيث : $a(1;-1)=(0;0)$

ثم نبين أن : $a=0$

لدينا : $a(1;-1)=(0;0)$ إذن : $(a;-a)=(0;0)$

و منه : $a=0$

إذن : B : أسرة حرة

بما أن : $B=((1;-1))$ أسرة مولدة لـ F و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي F

إذن : $\dim F=cardB$

$$\boxed{\dim F=2}$$

تمرين8

$$E=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / -3x+y-2z=0\}$$

$$F=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / -x+y+z=0\}$$

1- أ - بين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساسا لـ E ثم استنتج بُعْدَه

2- أ - بين أن : $(F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساسا لـ F ثم استنتج بُعْدَه

3- أ- بين أن : $(E\cap F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساسا لـ $E\cap F$ ثم استنتج بُعْدَه

الحل

1- أ - لنبين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$

$E\neq\varnothing$ لأن : $(0;0;0)\in E$ (1)

نعتبر : $((x;y;z);(x';y';z'))\in E^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

نبين : $\alpha(x;y;z)+\beta(x';y';z')\in E$

$$\alpha(x;y;z)+\beta(x';y';z')=(\alpha x+\beta x';\alpha y+\beta y';\alpha z+\beta z')$$

$$-3(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+2(\alpha z+\beta z')=\alpha(-3x+1y+2z)+\beta(-3x'+1y'+2z')$$

إذن : $-3(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+2(\alpha z+\beta z')=0$

ومنه : (2)

$$\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\ \forall((x;y;z);(x';y';z'))\in E^2 : \alpha(x;y;z)+\beta(x';y';z')\in E$$

و من (1) و (2) :

E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$

و منه : E فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعْدَه

نعتبر : $(x;y;z)\in E$ إذن : $y=3x-2z$

$$(x;y;z)=(x;3x-2z;z)$$

$$\boxed{(x;y;z)=x\,(1;3;0)+z\,(0;-2;1)}$$

إذن : $B=((1;3;0),(0;-2;1))$ أسرة مولدة ل E

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ بحيث : $a(1;3;0)+b(0;-2;1)=(0;0;0)$

ثم نبين أن : $a=b=0$

لدينا : $a(1;3;0)+b(0;-2;1)=(0;0;0)$

إذن : $(a;3a-2b;b)=(0;0;0)$

و منه : $a=b=0$

إذن : B أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة ل E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E=cardB$

$$\boxed{\dim E=2}$$

2- أ - بين أن : $(F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

بنفس طريقة 1-أ نجد :

F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$

و منه : $(F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل F ثم استنتاج بُعْدَه

نعتبر : $(x;y;z)\in E$ إذن : $x=y+z$

$$(x;y;z)=(y+z;y;z)$$

$$\boxed{(x;y;z)=y\,(1;1;0)+z\,(1;0;1)}$$

بنفس طريقة 1 ب نبين أن :

$B=((1;1;0),(1;0;1))$ أساس للفضاء المتجهي F

إذن : $\dim F=cardB$

$$\boxed{\dim F=2}$$

3- أ- تحديد $E\cap F$

$$E\cap F=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / \begin{cases}-3x+y-2z=0\\ -x+y+z=0\end{cases}\right\}$$

$$E\cap F=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / \begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}z\\ y=-\dfrac{5}{2}z\end{cases}\right\}$$

$$E\cap F=\left\{\left(-\frac{3}{2}z;-\frac{5}{2}z;z\right) / z\in\mathbb{R}\right\}$$

- لنبين أن : $(E\cap F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

بنفس طريقة 1-أ نجد :

$E\cap F$ فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$

و منه : $(E\cap F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعْدَه

$$\left(-\frac{3}{2}z;-\frac{5}{2}z;z\right)=z\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2};1\right)$$

بنفس طريقة 1 ب نبين أن :

$B=\left(\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2};1\right)\right)$ أساس للفضاء المتجهي $E\cap F$

إذن : $\dim E\cap F=cardB$

$$\boxed{\dim E\cap F=1}$$

تمرين9

لكل : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $x\in\mathbb{R}^{*+}$

نعتبر الدالة العددية : $\varphi_{(a;b)}(x)=\ln(x^a e^{bx})$

$$E=\left\{\varphi_{(a;b)} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

أ - بين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساسا ل E ثم استنتج بُعْدَه

الحل

$$\varphi_{(a;b)}(x)=\ln(x^a e^{bx})$$

$$=\ln(x^a)+\ln(e^{bx})$$

$$\boxed{\varphi_{(a;b)}(x)=a\ln(x)+bx}$$

أ - لنبين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\bullet)$

$E\neq\varnothing$ لأن : $\varphi_{(0;0)}=0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\in E$ (1)

نعتبر : $(\varphi_{(a;b)};\varphi_{(c;d)})\in E^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

و نبين أن : $(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)})\in E$

ليكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$

$$\left(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}\right)(x)=\alpha\varphi_{(a;b)}(x)+\beta\varphi_{(c;d)}(x)$$
$$=\alpha\left(a\ln(x)+bx\right)+\beta\left(c\ln(x)+dx\right)$$
$$=(\alpha a+\beta c)\ln(x)+(\alpha b+\beta d)x$$
$$=\varphi_{(\alpha a+\beta c;\alpha b+\beta d)}(x)$$
$$\boxed{\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}=\varphi_{(\alpha a+\beta c;\alpha b+\beta d)}}$$

إذن : (2)

$$\left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\left(\varphi_{(a;b)};\varphi_{(c;d)}\right)\in E^2\right):\left(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}\right)\in E$$

و من (1) و (2) : $(E;*;\bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\bullet)$

و بالتالي : $(E;*;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعْدَه

نعتبر : $\varphi_{(a;b)}\in E$ و $x\in\mathbb{R}^{*+}$

إذن : $\varphi_{(a;b)}(x)=a\ln(x)+bx$

و منه : $B=\left(\varphi_{(1;0)},\varphi_{(0;1)}\right)$ أسرة مولدة ل E

بحيث : $\varphi_{(1;0)}(x)=\ln(x)$ و $\varphi_{(0;1)}(x)=x$

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ بحيث : $a\varphi_{(1;0)}(x)+b\varphi_{(0;1)}(x)=0$

ثم نبين أن : $a=b=0$

لدينا : $a\varphi_{(1;0)}(x)+b\varphi_{(0;1)}(x)=0$

إذن : $a\ln(x)+bx=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

نعتبر : $x=1$ نجد : $b=0$

نعتبر : $x=e$ نجد : $a=0$

و منه : $a=b=0$

إذن : : B أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة ل E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E=cardB$

$$\boxed{\dim E=2}$$

تمرين10

لكل : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $x\in]-1;1[$ ؛ $I=]-1;1[$

نعتبر الدالة العددية : $\varphi_{(a;b)}(x)=\dfrac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$

$$E=\left\{\varphi_{(a;b)}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

أ - بين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساسا ل E ثم استنتج بُعْدَه

الحل

$$\varphi_{(a;b)}(x)=\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$
$$=\frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$\boxed{\varphi_{(a;b)}(x)=a\frac{1}{(x-1)}+b\frac{1}{(x+1)}}$$

أ - لنبين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R});+;\bullet)$

$E\neq\varnothing$ لأن : $\varphi_{(0;0)}=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\in E \quad (1)$

نعتبر : $\left(\varphi_{(a;b)};\varphi_{(c;d)}\right)\in E^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

و نبين أن : $\left(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}\right)\in E$

ليكن $x\in]-1;1[$

$$\left(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}\right)(x)=\alpha\varphi_{(a;b)}(x)+\beta\varphi_{(c;d)}(x)$$
$$=\alpha\left(a\frac{1}{(x-1)}+b\frac{1}{(x+1)}\right)+\beta\left(c\frac{1}{(x-1)}+d\frac{1}{(x+1)}\right)$$
$$=(\alpha a+\beta c)\frac{1}{(x-1)}+(\alpha b+\beta d)\frac{1}{(x+1)}$$
$$=\varphi_{(\alpha a+\beta c;\alpha b+\beta d)}(x)$$
$$\boxed{\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}=\varphi_{(\alpha a+\beta c;\alpha b+\beta d)}}$$

إذن : (2)

$$\left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\left(\varphi_{(a;b)};\varphi_{(c;d)}\right)\in E^2\right):\left(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}\right)\in E$$

و من (1) و (2) : $(E;*;\bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R});+;\bullet)$

و بالتالي : $(E;*;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعْدَه

نعتبر : $\varphi_{(a;b)}\in E$ و $x\in]-1;1[$

إذن : $\varphi_{(a;b)}(x)=a\dfrac{1}{(x-1)}+b\dfrac{1}{(x+1)}$

و منه : $B=\left(\varphi_{(1;0)},\varphi_{(0;1)}\right)$ أسرة مولدة ل E

بحيث : $\varphi_{(1;0)}(x)=\dfrac{1}{(x-1)}$ و $\varphi_{(0;1)}(x)=\dfrac{1}{(x+1)}$

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ بحيث : $a\varphi_{(1;0)}(x)+b\varphi_{(0;1)}(x)=0$

ثم نبين أن : $a=b=0$

لدينا : $a\varphi_{(1;0)}(x)+b\varphi_{(0;1)}(x)=0$

إذن : $a\dfrac{1}{(x-1)}+b\dfrac{1}{(x+1)}=0 \quad \forall x\in]-1;1[$

نعتبر : $x=0$ نجد : $a=b$

إذن : $a\left(\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x+1)}\right)=0 \qquad \forall x\in]-1;1[$

و منه : $a\times\frac{2x}{x^2-1}=0 \qquad \forall x\in]-1;1[$

إذن : $a=0$:

و منه : $a=b=0$

إذن : B أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة لـ E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E = cardB$

$\boxed{\dim E = 2}$

تمرين11

$B_1=(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ أساس في فضاء متجهي حقيقي E بُعْدَه 3

$B_2=(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ أسرة بحيث :

$$\begin{cases}\vec{e_1}=\vec{u_1}+\vec{u_2}+\vec{u_3}\\ \vec{e_2}=\vec{u_1}-2\vec{u_2}-\vec{u_3}\\ \vec{e_3}=2\vec{u_1}-\vec{u_2}+\vec{u_3}\end{cases}$$

1- بين أن B_2 أساس في E

2- $\vec{u}(1;2;3)_{B_1}$ في الأساس B_1 أوجد احداثيات $\vec{u}$ في الأساس B_2

الحل

1- لدينا : $\vec{e_3}(2;-1;1);\vec{e_2}(1;-2;-1);\vec{e_1}(1;1;1)$ في الأساس B_1

و $\dim E=3$ و $cardB_2=3$

إذن : $\dim E = cardB_2$

ومنه : للبرهنة أن B_2 أساس في E

يكفي أن نبرهن أن : B_2 حرة

لدينا : $\det(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-2&-1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=3$

بما أن : $\det(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})\neq 0$ فإن : B_2 حرة

ومنه : B_2 أساس في E

2- $\vec{u}(1;2;3)_{B_1}$ في الأساس B_1 أوجد احداثيات $\vec{u}$ في الأساس B_2

نعتبر : $\vec{u}(a;b;c)_{B_2}$ في الأساس B_2

إذن :

$\vec{u}=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3}$

$\vec{u}=a(\vec{u_1}+\vec{u_2}+\vec{u_3})+b(\vec{u_1}-2\vec{u_2}-\vec{u_3})+c(2\vec{u_1}-\vec{u_2}+\vec{u_3})$

$\vec{u}=(a+b+c)\vec{u_1}+(a-2b-c)\vec{u_2}+(a-b+c)\vec{u_3}$

ولدينا : $\vec{u}=\vec{u_1}+2\vec{u_2}+3\vec{u_3}$

إذن : $\begin{cases}a+b+c=1\\a-2b-c=2\\a-b+c=3\end{cases}$ ومنه : $c=\frac{4}{3};b=-\frac{5}{3};a=0$

إذن : $\boxed{\vec{u}\left(0;-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right) \text{ في الأساس } B_2}$

تمرين 12

$$E=\left\{M=\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a+c&b+c\\c&b&a+c\end{pmatrix}/(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};J=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix};k=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

1- تحقق أن : $IK=KJ=I+J;k^2=J+K;j^2=K$

2- بين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له

3- بين أن : $(E;+;\times)$ حلقة واحدية

4- تحقق أن : $J^3=I+J$ ثم حدد J^{-1}

الحل

1- نتحقق أن : $IK=KJ=I+J;k^2=J+K;j^2=K$

الحساب

2- $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

يكفي أن نبين أن : E فضاء متجهي جزئي من $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\bullet)$

تحديد أساس لـ E

$$\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a+c&b+c\\c&b&a+c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

إذن : $B_2=(I;J;K)$ أساس لـ E

3- لنبين أن : $(E;+;\times)$ حلقة واحدية

أ- نبين أن : $(E;+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+)$

و بما أن : $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E;+)$ زمرة تبادلية (1)

ب- نبين أن : $(E;\times)$ جزء مستقر من $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$

و بما أن : $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$ تجميعي تبادلي يقبل عنصرا محايدا I

و $I\in E$

و $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

فإن : $(E;\times)$ تجميعي تبادلي يقبل عنصرا محايدا I

و $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E $\qquad(2)$

من (1) و (2) : $(E;+;\times)$ حلقة واحدية

-4 $J^3=I+J$ (الحساب)

$$J^3=I+J \Rightarrow J^{-1}J^3=J^{-1}I+J^{-1}J$$
$$\Rightarrow J^2=J^{-1}+I$$
$$\Rightarrow J^{-1}=I-J^2$$
$$\Rightarrow J^{-1}=I-K$$

ومنه : $J^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

$$J^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

تمرين 13

حدد : M^{-1}

1 - $M=\begin{pmatrix}-2&-3\\4&5\end{pmatrix}$ -2 $M=\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&2&5\\2&3&4\end{pmatrix}$

الحل

-1 تحديد : M^{-1} بحيث : $M=\begin{pmatrix}-2&-3\\4&5\end{pmatrix}$

$$\det M=\frac{1}{2}$$

$Com(M)=\begin{pmatrix}5&-4\\3&2\end{pmatrix}$ و ${}^{t}Com(M)=\begin{pmatrix}5&3\\-4&2\end{pmatrix}$

لدينا : $M^{-1}=\frac{1}{\det M}\times{}^{t}(comM)$

إذن : $M^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&3\\-4&-2\end{pmatrix}$

-2 تحديد : M^{-1} بحيث : $M=\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&2&5\\2&3&4\end{pmatrix}$

$$\det M=12$$

$$Com(M)=\begin{pmatrix}-7&6&-1\\-15&6&3\\17&-6&-1\end{pmatrix}$$

$${}^{t}Com(M)=\begin{pmatrix}-7&-15&17\\6&6&-6\\-1&3&-1\end{pmatrix}$$

لدينا : $M^{-1}=\frac{1}{\det M}\times{}^{t}(comM)$

إذن : $M^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-7&-15&17\\6&6&-6\\-1&3&-1\end{pmatrix}$

المديرية الإقليمية للتربية و التكوين
تارودانت
الثانوية التأهيلية محمد السادس – تالوين

الموسم الدراسي : 2015/2016

المستوى : الثانية باكلوريا علوم رياضية أ

الأستاذ : معاذ أكرام

سلسلة تمارين درس الفضاءات المتجهية الحقيقية

التمرين 1

1. ادرس في $\mathbb{R}^3$ استقلال الأسر التالية :

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(2,1,-1),(0,1,-2)\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{(1,1,-1),(1,-1,0)\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(3,-1,1),(-1,0,2),(1,0,-2)\} \qquad \mathcal{B}_4 = \{(1,1,1),(2,-1,1),(1,0,1)\}$$

التمرين 2

1. حدد من بين الأسر التالية التي تكون اساس للفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(3,0,-1),(-1,1,-1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,1,-1),(1,-1,0)\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(1,2,1),(3,0,-1),(1,8,1)\}$$

$$\mathcal{B}_4 = \{(1,2,-3),(1,0,-1),(1,1,0)\}$$

التمرين 3

في الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$ نعتبرالمجموعات :

$$E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x-2y+z=0\right\} \qquad E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x+y-4z=0\right\}$$

$$E_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x-2y=0 et z-x=0\right\} \qquad E_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad xy-z=0\right\}$$

$$E_6 = \left\{(\alpha,\beta,2\alpha) / \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\} \qquad E_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x+y-4z=0\right\}$$

1. حدد من بين المجموعات اعلاه التي تمثل فضاءات متجهية جزئية للفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$

التمرين 4

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي : $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x-y+3z=0\right\}$

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.
2. نعتبر في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2,+,.)$ المتجهتين : $\vec{e_1} = (0,3,1)$ و $\vec{e_2} = (1,1,0)$.
   1.2 بين أن الأسرة $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,.)$.
   2.2 بين أن الأسرة $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ حرة في الفضاء $(E,+,.)$.

3 استنتج $\dim E$

التمرين 5

نعتبر المجموعة $D-\{1\}$ و E مجموعة الدوال العددية f المعرفة على D بما يلي : $f(x)=\dfrac{P(x)}{x^3-1}$. حيث $P(x)$ حدودية درجتها أصغر أو يساوي 2.

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.
2. نعتبر الدوال $g_1(x)=\dfrac{1}{x-1}$ و $g_2(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ و $g_3(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

1.2 بين أن الأسرة $\mathcal{B}=\{g_1,g_2,g_3\}$.

2.2 حدد إحداثيات الدالة $h(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

التمرين 6

لتكن P_4 مجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من أو يساوي 4 بحيث : $\mathcal{B}=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ أساس للفضاء المتجهي $(P_4,+,.)$.

1. بين أن الأسرة $\mathcal{T}=\{(1+x)^4,x(1+x)^3,x^2(1+x)^2,x^3(1+x),x^4\}$ اساس للفضاء المتجهي $(P_4,+,.)$.
2. حدد إحداثيات الحدودية $P(x)=x^3+x^2+2x-1$ في الأساس $\mathcal{T}$.

التمرين 7

نعرف في المجموعة $E=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي $+$ بما يلي : $(x,y)+(x',y')=(xx',y+y')$; $(\forall(x,y),(x',y')\in E)$

وقانون التركيب الداخلي معاملاته في $\mathbb{R}$ بمايلي : $\alpha(x,y)=(x^\alpha,\alpha y)$: $(\forall\alpha\in\mathbb{R});(\forall(x,y)\in E)$.

1. نعتبر التطبيق :
$$\begin{array}{rcl}\varphi:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & E\\ (x,y) & \longmapsto & (e^x,y)\end{array}$$
نذكر $(\mathbb{R}^2,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

1.1 بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^2,+)$ نحو $(E,+)$.

1.2 استنتج أن $(E,+)$ زمرة تبادلية.

1.3 حدد العنصر المحايد في $(E,+)$، وما هو مماثل (x,y) في $(E,+)$.

2 بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

التمرين 8

نعتبر المجموعة التالية : $E=\{f:x\mapsto(ax+b)e^{2x}/\quad(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.
2. لتكن f_1 و f_2 الدالتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_1(x)=xe^{2x}$ و $f_2(x)=e^{2x}$.

2.1 بين أن الأسرة $\mathcal{B}=\{f_1,f_2\}$ أساس للفضاء المتجهي E.

2.2 بين أن الدالة $g(x)=\displaystyle\int_0^x(t+\frac{1}{2})e^{2t}dt$ تنتمي الى المجموعة E، محددا زوج احداثياتها بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.