| سلسلة 1 | الدوال الأسيــــــــــة | السنة 2 بكالوريا علوم رياضية |
|---|---|---|

**تمرين 1** :

1) حل في $IR$ المعادلات : $e^{4x-3}=1$ ، $e^{x-4}=0$ ، $e^{x^2-3x-3}=e$ ، $3e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}=0$ ، $2^{x}=3^{1-2x}$

2) حل في $IR$ المتراجحات : $2e^{2x}-3e^{x}+1<0$ و $e^{x}-2e^{-x}+1>0$

**تمرين 2** : حدد $f'(x)$ في كل حالة مما يلي دون تحديد مجموعة التعريف :

$f(x)=e^{5x}$ ، $f(x)=e^{x+\ln(x)}$ ، $f(x)=\ln(x)\,e^{x}$ ، $f(x)=x^{x}$ ، $f(x)=\ln(e^{x}+1)$

**تمرين 3** : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}+2}{e^{x}+1} \quad ، \quad \lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{|x|}\,e^{x} \quad ، \quad \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}+1}{x^{3}} \quad ، \quad \lim_{x\mapsto-\infty}\frac{e^{x}+x}{e^{x}+7}$$

$$\lim_{x\mapsto0^{+}}(e^{x}-1).\ln(x) \quad ، \quad \lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x} \quad ، \quad \lim_{x\mapsto0^{+}}(x+1)^{x} \quad ، \quad \lim_{x\mapsto0^{+}}x^{\sqrt{x}}$$

**تمرين 4** : نعتبر المتتالية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=u_n^{3} \end{cases}$ و نضع لكل $n\in IN$ $v_n=\ln(u_n)$

1) بين أن $v_n$ هندسية ثم استنتج حساب $u_n$ بدلالة $n$

2) احسب $\lim_{n\mapsto+\infty}u_n$

**تمرين 5** : حدد دالة أصلية للدالة $f$ في الحالات التالية :

$f(x)=e^{3x+1}$ ، $f(x)=\dfrac{1+e^{x}}{e^{x}}$ ، $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$ ، $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1}$ ، $f(x)=(e^{x}+1)^{2}$

$f(x)=\dfrac{1}{e^{x}+1}$ ، $f(x)=\cos x\, e^{\sin x}$ ، $f(x)=\sqrt{e^{x}}+\sqrt[3]{e^{x}}$ ، $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

| السنة 2 بكالوريا علوم رياضية | الدوال الأسيـــــــة<br>حلول مقترحة | سلسلة 1 |
|---|---|---|

**تمرين 1 :**

**1**

لدينا : $x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x-3=0 \Leftrightarrow e^{4x-3}=e^{0} \Leftrightarrow e^{4x-3}=1$ ، منه : $\boxed{S=\left\{\frac{3}{4}\right\}}$

$e^{x-4}=0$ منه : $\boxed{S=\phi}$ ( لأن : $e^{x-4}>0 \quad \forall x\in IR$ )

لدينا : $x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x^2-3x-3=1 \Leftrightarrow e^{x^2-3x-3}=e^{1} \Leftrightarrow e^{x^2-3x-3}=e$

$x_2=\frac{3-5}{2}=-1 \quad et \quad x_1=\frac{3+5}{2}=4 \Rightarrow \Delta=9+16=25$ ، منه : $\boxed{S=\{4\,;-1\}}$

$3\left(e^{x}\right)^2-2e^{x}-1=0 \Leftrightarrow 3\left(e^{x}\right)^2-2e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}\left(3e^{2x}-2e^{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow 3e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}=0$

(لأن : $e^{x}>0 \quad \forall x\in IR$)

نضع $e^{x}=t$ منه: $3t^2-2t-1=0$ ، منه : $t=\frac{2-4}{6}=\frac{-1}{3} \quad ou \quad t=\frac{2+4}{6}=1 \Rightarrow \Delta=4+12=16$

منه : $e^{x}=\frac{-1}{3}<0 \quad ou \quad e^{x}=1$ أي $e^{x}=e^{0}$ ، بالتالي: $\boxed{S=\{0\}}$

المتساويتان $e^{x}=0$ و $e^{x}=\frac{-1}{3}$ غير ممكنتان (لأن دالة الأس دائما موجبة قطعا ) ،لذلك تم تجاوزهما.

$2^{x}=3^{1-2x} \Leftrightarrow \ln\left(2^{x}\right)=\ln\left(3^{1-2x}\right) \Leftrightarrow x\ln(2)=(1-2x)\ln(3)$

$\Leftrightarrow x\ln(2)=\ln(3)-2\ln(3)\,x \Leftrightarrow (\ln(2)-2\ln(3))x=\ln(3) \Leftrightarrow x=\frac{\ln(3)}{\ln(2)-2\ln(3)}$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{\ln(3)}{\ln\left(\frac{2}{9}\right)}\right\}}$

قد يبدو السؤال لا علاقة له بدالة الأس، لكن الأمر غير ذلك ، فالكتابة $2^{x}$ و $3^{1-2x}$ هي كتابة لدوال أسية ذات الأسس 2 و 3 على التوالي و هذا يعني أن $2^{x}>0$ و $3^{1-2x}>0$ و هذا ما سمح باستعمال دالة اللوغاريتم النبيري في طرفي المتساوية

**2**

لحل المتراجحة $2e^{2x}-3e^{x}+1<0$ نضع : $e^{x}=t$

فنجد: $2t^2-3t+1<0$

$t=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2} \quad ou \quad t=\frac{3+1}{4}=1 \Rightarrow \Delta=9-8=1$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2-3$ | + | - | + | |

منه : $t\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ أي $\frac{1}{2}<t<1$

أي : $\frac{1}{2}<e^{x}<1$ أي : $\ln\left(\frac{1}{2}\right)<x<\ln(1)$

أي : $-\ln(2)<x<0$

بالتالي: $\boxed{S=\left]-\ln(2),0\right[}$

لدينا : $e^{x}-2e^{-x}+1>0 \Leftrightarrow e^{x}-\frac{2}{e^{x}}+1>0$

$\Leftrightarrow \frac{\left(e^{x}\right)^2-2+e^{x}}{e^{x}}>0$

$\Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^2+e^{x}-2>0$

نضع : $e^{x}=t$ فنجد: $t^2+t-2<0$

$\Delta=1+8=9 \Rightarrow t=\frac{-1+3}{2}=1 \; ou \; t=\frac{-1-3}{2}=-2$

$e^{x}-2e^{-x}+1>0 \Leftrightarrow \left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+2\right)>0$

$\Leftrightarrow \left(e^{x}-1\right)>0$

$\Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow x>0$

بالتالي: $\boxed{S=\left]0,+\infty\right[}$

في المتراجحة الثانية استعملنا طريقة التعميل لكوننا سنحصل على عامل موجب $e^{x}+2$ مما يسمح بربح الوقت.

**تمرين 2** :

$$f(x)=e^{5x}$$

$$f'(x)=\left(e^{5x}\right)'=(5x)'\,e^{5x}=5\,e^{5x}$$

$$f(x)=e^{x+\ln(x)}$$

$$f'(x)=\left(e^{x+\ln(x)}\right)'=(x+\ln(x))'\,e^{x+\ln(x)}=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x+\ln(x)}$$

$$f(x)=\ln(x)\,e^{x}$$

$$f'(x)=\left(\ln(x)\,e^{x}\right)'=(\ln(x))'\,e^{x}+\ln(x)\left(e^{x}\right)'$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}e^{x}+\ln(x)e^{x}=\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)e^{x}$$

$$f(x)=\ln\left(e^{x}+1\right)$$

$$f'(x)=\left(\ln\left(e^{x}+1\right)\right)'=\frac{\left(e^{x}+1\right)'}{e^{x}+1}=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

$$f(x)=x^{x}$$

$$f'(x)=\left(x^{x}\right)'=\left(e^{\ln\left(x^{x}\right)}\right)'=\left(e^{x\ln(x)}\right)'=(x\ln(x))'\,e^{x\ln(x)}=\left(x'\ln(x)+x(\ln(x))'\right)e^{x\ln(x)}=(\ln(x)+1)\,e^{x\ln(x)}$$

لا يمكننا في هذا المثال الاشتقاق باستعمال القاعدة $\left(x^{r}\right)'=r\,x^{r-1}$ ، لكون الأس متغير و ليس بعدد ثابت، لذلك وجب علينا تغيير صيغة الدالة لإيجاد الخاصية المناسبة للاشتقاق

**تمرين 3** : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}+2}{e^{x}+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}\left(1+\frac{2}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{e^{x}}\right)}{\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\sqrt{|x|}\;e^{x}$ نضع : $t=-x$ إذن :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{|x|}\;e^{x}=\lim_{t\mapsto+\infty}\sqrt{|-t|}\;e^{-t}==\lim_{t\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^{t}}=\lim_{t\mapsto+\infty}\frac{t}{e^{t}}\times\frac{1}{\sqrt{t}}=0\times0=0$$

بصفة عامة عند حساب نهاية لدوال أسية عند $-\infty$ و عند الحصول على شكل غير محدد يستحسن استعمال تغيير المتغير $t=-x$ ، و ذلك لكونه يحول النهاية لـ $+\infty$ و هو ما يسمح باستغلال أهم النهايات الخاصة للدوال الأسية

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$ هذه النهاية الخاصة تم استعمال مقلوبها : أي $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{x^{n}}{e^{x}}=0$ حيث $n=1$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}+1}{x^{3}}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}}{x^{3}}+\frac{1}{x^{3}}=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}}{x^{3}}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x^{3}}=0$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{e^{x}+x}{e^{x}+7}=-\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{0+x}{0+7}=-\infty$

مثال سهل، لكن الهدف منه أن تتعلم عدم تجاوز مرحلة التعويض قبل أية محاولة للتعميل أو ما شابه.

$$\lim_{x\mapsto0^{+}}\left(e^{x}-1\right).\ln(x)=\lim_{x\mapsto0^{+}}\frac{e^{x}-1}{x}.\;(x\ln(x))=1\times0=0$$

$$\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}=\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-1-e^{x}+1}{x}=\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-1}{x}-\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{x\mapsto0}2\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^{x}-1}{x}=2\times1-1=1$$

$$\lim_{x\mapsto0^{+}}(x+1)^{x}=\lim_{x\mapsto0^{+}}e^{x\ln(x+1)}=e^{0\times0}=1$$

لا يصح التعويض بالطريقة : $\lim\limits_{x\mapsto0^{+}}(x+1)^{x}=1^{0}=1$

$\lim\limits_{x\mapsto0^{+}}x^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\mapsto0^{+}}e^{\sqrt{x}\ln(x)}$ نضع : $\sqrt{x}=t$ منه :

$$\lim_{x\mapsto0^{+}}x^{\sqrt{x}}=\lim_{t\mapsto0^{+}}e^{t\ln\left(t^{2}\right)}=\lim_{t\mapsto0^{+}}e^{2\,t\ln(t)}=e^{2\times0}=1$$

**تمرين 4** : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^3 \end{cases}$ و ، $n \in IN$ $\quad v_n = \ln(u_n)$

| | |
|---|---|
| 1 | لدينا : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n^3) = 3\ln(u_n) = 3v_n$ إذن : $v_n$ متتالية هندسية أساسها $q = 3$ <br> و حدها الأول : $v_0 = \ln(u_0) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ منه : $v_n = v_0\ q^n = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) 3^n$ <br> منه : $\ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) 3^n$ بالتالي : $u_n = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) 3^n} = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3^n}\right)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3^n}$ |
| 2 | لدينا : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} -\ln(2)\, 3^n = -\infty$ لأن : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 3^n = +\infty$ و $-\ln(2) < 0$ <br> منه : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \exp\left(-\ln(2)\, 3^n\right) = 0$ |

**تمرين 5** :

| الدالة | الدالة الأصلية |
|---|---|
| $f(x) = e^{3x+1}$ | $F(x) = \dfrac{1}{3} e^{3x+1}$ |
| $f(x) = \dfrac{1+e^x}{e^x}$ | $f(x) = \dfrac{1}{e^x} + 1 = e^{-x} + 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = -e^{-x} + x = \dfrac{-1}{e^x} + x$ |
| $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ | $f(x) = \dfrac{(e^x+1)'}{(e^x+1)} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln(e^x+1)$ |
| $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1}$ | $f(x) = \dfrac{(e^x)'}{(e^x)^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \mathrm{Arctan}(e^x)$ |
| $f(x) = (e^x + 1)^2$ | $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{1}{2} e^{2x} + 2\, e^x + x$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$ | $f(x) = \dfrac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} = 1 - \dfrac{e^x}{e^x + 1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = x - \ln(e^x + 1)$ |
| $f(x) = \cos x\ e^{\sin x}$ | $f(x) = (\sin x)'\ e^{\sin x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^{\sin x}$ |
| $f(x) = \sqrt{e^x} + \sqrt[3]{e^x}$ | $f(x) = \sqrt{e^x} + \sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{3}x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 2\, e^{\frac{1}{2}x} + 3\, e^{\frac{1}{3}x} = 2\sqrt{e^x} + 3\sqrt[3]{e^x}$ |
| $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ | $f(x) = 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x}\right)' e^{\sqrt{x}} = 2\ e^{\sqrt{x}}$ |

- لم يطلب منا تحديد جميع الدوال الأصلية ، لذلك إضافة الثابتة ليس ضروريا
- الدالة الأصلية للدالة $e^{ax+b}$ هي $\dfrac{1}{a} e^{ax+b}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان ثابتان و $a \neq 0$
- الدالة الأصلية للدالة $(u(x))'\ e^{u(x)}$ هي $e^{u(x)}$
- الدالة الأصلية للدالة $\dfrac{(u(x))'}{u(x)}$ هي $\ln(\lvert u(x) \rvert)$ ، الدالة الأصلية للدالة $\dfrac{(u(x))'}{u^2(x)+1}$ هي $\mathrm{Arctan}(u(x))$