

| رياضيات النجاح  | الدوال الأصلية                        | السنة 2 بكالوريا علوم رياضية                    |
|---|---------------------------------------|---|
| <p><b>تمرين 1:</b> حدد دالة أصلية للدالة <math>f</math> في كل حالة مما يلي:</p>   |                                       |   |
| $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$   | $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)^2}$ | $f(x) = x\sqrt{x}$                              |
| $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$   | $f(x) = \sin(5x+1) + \sin^3(x)$       | $f(x) = \frac{3}{x^2} + \sqrt[3]{x} + (2x+1)^4$ |
| $f(x) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}$  | $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$          | $f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{1+x^2}$         |
|   |                                       | $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$                 |
|   |                                       | $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$                        |
| <p><b>تمرين 2:</b> نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي: <math>f(x) = x\sqrt{x+1}</math></p> <p>(1) تحقق أن: <math>\forall x \in [-1; +\infty[</math> <math>f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}</math></p> <p>(2) أوجد الدالة الأصلية <math>F</math> للدالة <math>f</math> والتي تنعدم في 0</p>   |                                       |   |
| <p><b>تمرين 3:</b> نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي: <math>f(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2</math></p> <p>(1) حدد العددين الحقيقيين <math>a</math> و <math>b</math> حيث: <math>\forall x \in \mathbb{R}</math> <math>f(x) = \frac{a}{x^2+1} + \frac{bx}{(x^2+1)^2}</math></p> <p>(2) أوجد الدالة الأصلية <math>F</math> للدالة <math>f</math> والتي تحقق: <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0</math></p>   |                                       |   |
| <p><b>تمرين 4:</b> نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي: <math>f(x) = \sqrt{x^2 + 1}</math> و لتكن <math>F</math> الدالة الأصلية لـ <math>f</math> والتي تنعدم في 0</p> <p>(1) بين أن <math>\forall x \in [0, +\infty[</math> <math>F(x) \geq \frac{1}{2}x^2</math></p> <p>(2) أحسب <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)</math> و <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}</math> و أول النتائج هندسيا</p> <p>(3) بين أن الدالة <math>F</math> فردية</p> <p>(4) أوجد جدول تغيرات الدالة <math>F</math></p> <p>(5) أوجد معادلة مماس الدالة <math>F</math> في الصفر</p> <p>(6) حدد نقط انعطاف منحنى الدالة <math>F</math></p> <p>(7) أنشئ في معلم متعامد ممنظم <math>(C_F)</math> منحنى الدالة <math>F</math></p> |                                       |   |

## تمرين 1 :

$$f(x) = \frac{3}{x^2} + \sqrt[3]{x} + (2x+1)^4 = -3 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) + x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \times 2(2x+1)^4 \quad \text{لدينا :}$$

$$F(x) = \frac{-3}{x} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{10} (2x+1)^5 \quad \text{أي :} \quad F(x) = -3 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} x^{\frac{1+\frac{1}{3}}{3}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} (2x+1)^{5 \cdot \frac{1}{5}} \quad \text{منه :}$$

$$f(x) = x\sqrt{x} = x \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \quad \text{لدينا :} \quad F(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \quad \text{منه :} \quad F(x) = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} \quad \text{أي :}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} \quad \text{لدينا :} \quad F(x) = \frac{-1}{x^2+x+1} \quad \text{منه :}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{x^2+2x+1+1} = \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{(x+1)'}{(x+1)^2+1} \quad \text{لدينا :} \quad F(x) = \text{Arctan}(x+1) \quad \text{منه :}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}} = \frac{1}{2} \frac{(3+x^2)'}{\sqrt{3+x^2}} \quad \text{لدينا :} \quad F(x) = \sqrt{3+x^2} \quad \text{منه :}$$

$$f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{1+x^2} = \text{Arctan } x \times \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctan } x \times (\text{Arctan } x)' \quad \text{لدينا :} \quad F(x) = \frac{1}{2} (\text{Arctan } x)^2 \quad \text{منه :}$$

## لدينا :

$$f(x) = \sin(5x+1) + \sin(x) \times \sin^2(x) = \sin(5x+1) + \sin(x) \times (1 - \cos^2(x)) = \sin(5x+1) + \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)$$

$$f(x) = \sin(5x+1) + \sin(x) + \cos^2(x) \times (\cos(x))'$$

$$F(x) = \frac{-1}{5} \cos(5x+1) - \cos(x) + \frac{1}{3} \cos^3(x) \quad \text{منه :}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{2\sqrt{x}} \quad \text{لدينا :} \quad F(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \quad \text{أي :} \quad F(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} x^{1+\frac{1}{2}} + 2\sqrt{x} \quad \text{منه :}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+1} \times (x^2+1)' \quad \text{لدينا :} \quad F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}} (x^2+1)^{1+\frac{1}{2}} \quad \text{أي :} \quad F(x) = \frac{1}{3} (x^2+1)\sqrt{x^2+1} \quad \text{منه :}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} \quad \text{لدينا :} \quad F(x) = 2 \text{Arctan}(\sqrt{x}) \quad \text{منه :}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1} \quad \text{لدينا :} \quad F(x) = x - \text{Arctan}(x) \quad \text{منه :}$$

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{1+\sqrt{x}} \times (\sqrt{x})' \quad \text{لدينا :}$$

$$F(x) = 2 \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}} (1+\sqrt{x})^{1+\frac{1}{2}} \quad \text{منه :} \quad F(x) = \frac{4}{3} (1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}} \quad \text{أي :}$$

**تمرين 2 :**  $f(x) = x\sqrt{x+1}$

1 لدينا :  $\forall x \in [-1; +\infty[ (x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = x\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = x\sqrt{x+1} = f(x)$

بما أن :  $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}$  فإن الدوال الأصلية للدالة  $f$  هي على الشكل:

$$F(x) = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} (x+1)^{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} (x+1)^{\frac{1}{2}+1} + \lambda \quad / \lambda \in \mathbb{R}$$

2 منه :  $F(x) = \frac{2}{5}(x+1)^2 \sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + \lambda$

و لتكن  $F_0(x)$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  التي تنعدم في 0، إذن  $F_0(0) = 0$  منه :  $\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \lambda = 0$

منه :  $\lambda = -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$  بالتالي :  $F_0(x) = \frac{2}{5}(x+1)^2 \sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + \frac{4}{15}$

**تمرين 3 :**  $f(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2$

1 لدينا :  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2 = \frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

منه :  $a=1$  و  $b=-2$

الدوال الأصلية للدالة  $f$  هي على الشكل :  $F(x) = \text{Arctan } x + \frac{1}{x^2+1} + \lambda \quad / \lambda \in \mathbb{R}$

2 و لتكن  $F_0(x)$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  التي تحقق  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_0(x) = 0$

منه :  $\frac{\pi}{2} + 0 + \lambda = 0$  منه :  $\lambda = -\frac{\pi}{2}$  بالتالي :  $F_0(x) = \text{Arctan } x + \frac{1}{x^2+1} - \frac{\pi}{2}$

**تمرين 4 :**  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$  ، الدالة الأصلية لـ  $f$  والتي تنعدم في 0

نعتبر الدالة العددية  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $h(x) = F(x) - \frac{1}{2}x^2$

لدينا :  $\forall x \in \mathbb{R} h'(x) = f(x) - x = \sqrt{x^2+1} - x$

1 وبما أن :  $x^2+1 > x^2$  فإن :  $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$  أي :  $\sqrt{x^2+1} > |x|$  وحيث أن :  $|x| \geq x$

فإن :  $\sqrt{x^2+1} > x$  ، ما يعني أن :  $h$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$

بالتالي :  $x \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0) = 0$  بالتالي :  $\forall x \in [0, +\infty[ F(x) \geq \frac{1}{2}x^2$

2 بما أن :  $\forall x \in [0, +\infty[ F(x) \geq \frac{1}{2}x^2$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

و بما أن :  $\forall x \in [0, +\infty[ \frac{F(x)}{x} \geq \frac{1}{2}x$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

و هذا يعني أن منحنى الدالة  $F$  يقبل فرعاً شلجيمياً باتجاه محور الأرتايب.

نعتبر الدالة العددية  $p$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $p(x) = F(-x) + F(x)$  ، لدينا :

3  $\forall x \in \mathbb{R} p'(x) = (F(-x))' + (F(x))' = -F'(-x) + F'(x) = -f(-x) + f(x) = -\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1} = 0$

إذن :  $p$  دالة ثابتة، إذن :  $\exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R} p(x) = C$  منه :  $F(-x) + F(x) = C$

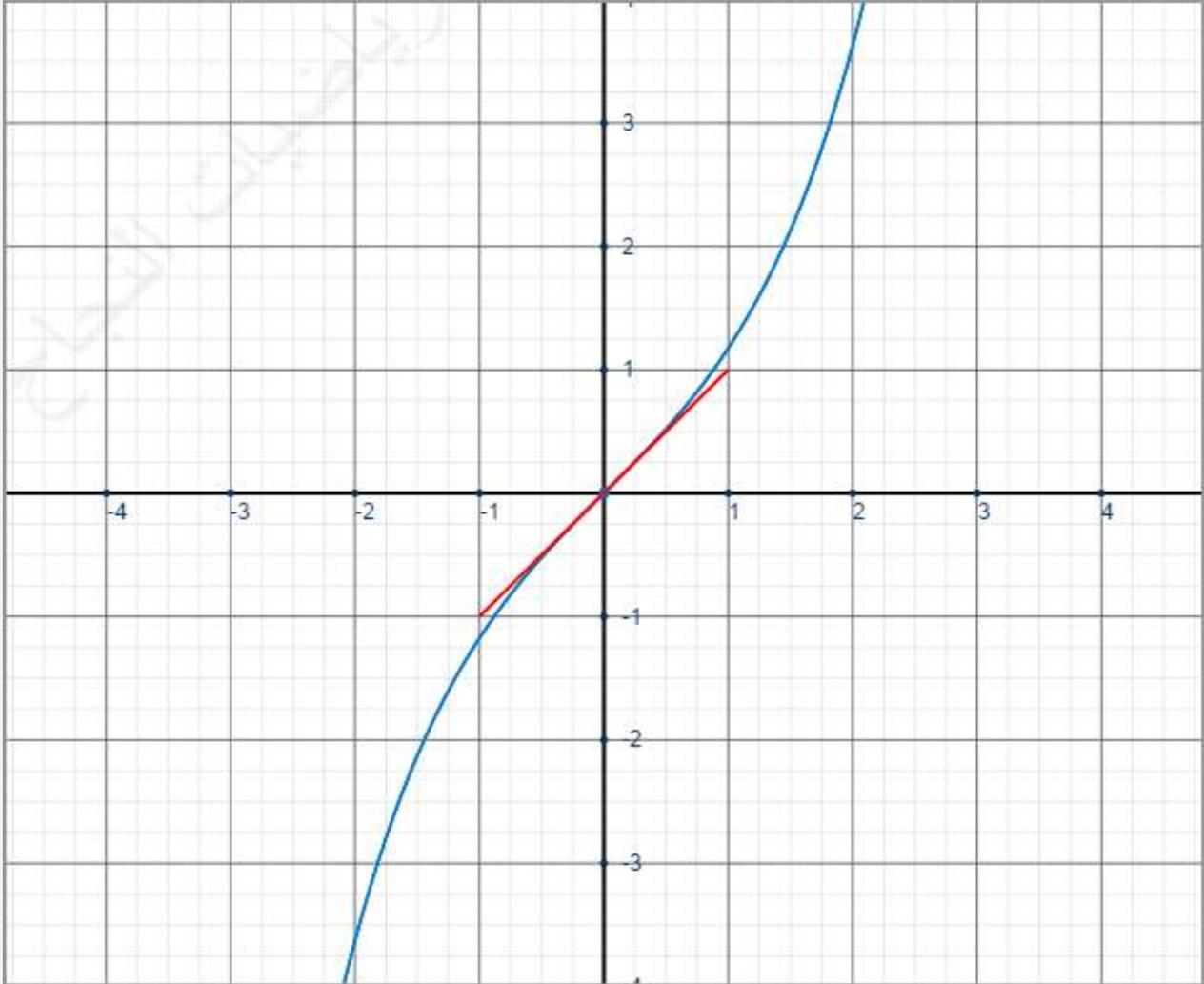
منه :  $F(0) + F(0) = C$  إذن :  $C = 0$  و بالتالي :  $\forall x \in \mathbb{R} F(-x) = -F(x)$

وحيث أن :  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$  فإن  $F$  دالة فردية.

4 بما أن:  $\forall x \in \mathbb{R} F'(x) = f(x) > 0$  فإن  $F$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$ .

5 معادلة مماس الدالة  $F$  في الصفر هي:  $(\Delta): y = F'(0)(x-0) + F(0)$  أي:  $y = f(0)x = x$

6 لدينا:  $\forall x \in \mathbb{R} F''(x) = f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  و حيث أن الشمقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها فقط في الصفر، فنقط انعطاف منحنى الدالة  $F$  هي النقطة  $O(0, 0)$



7