

المخروطيات

المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

1

نعبر (1) مجموعة النقط $M(x, y)$ من \mathcal{P} التي تحقق :

$$\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$$

(1) بين أن (1) هو اتحاد مخروطيين (1) و (2).

(2) حدد العناصر المميزة للمخروطيين (1) و (2).

(3) أنشئ (3).

الجواب : (1) لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى \mathcal{P} لدينا :

$$M(x, y) \in (1) \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + \frac{y^2}{4} - 1)(x^2 - \frac{y^2}{4} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \text{ أو } x^2 - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow M(x, y) \in (1) \cup (2)$$

www.learnit.org

بيئت : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ (1) : هذلول.

• هليج : $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (2)

وبالتالي : $(1) = (1) \cup (2)$

(4) العناصر المميزة لإ هليج (1) :

لدينا : $(1) : \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ حيث : $a=1$ و $b=2$ و $b > a$

لدينا : $c^2 = b^2 - a^2 = 3$ إذن : $c = \sqrt{3}$

ومنه : التباعد المركز بي لـ (1) هو : $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* البؤرتان لـ (1) هما : $F_1(0, -c)$ و $F_2(0, c)$

أي : $F_1(0, -\sqrt{3})$ و $F_2(0, \sqrt{3})$

* الدليلان لـ (1) هما : $(D_1) : x = \frac{b^2}{c}$ و $(D_2) : x = -\frac{b^2}{c}$

أي : $(D_1) : x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ و $(D_2) : x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$

* الرؤوس لـ (1) هي : $A(1, 0)$ و $A'(-1, 0)$ و $B(0, 2)$ و $B'(0, -2)$

العناصر المبنية للمذلول (٢):

لدينا: $(٢): \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{2} = 1$ حيث: $a=1$ و $b=2$

لدينا: $c^2 = a^2 + b^2 = 5$ إذن: $c = \sqrt{5}$

ومنه: * التباعد المركزي لـ (٢) هو: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$

* البؤرتان لـ (٢) هما: $F_2(c, 0)$ و $F_2(-c, 0)$

أي: $F_2(\sqrt{5}, 0)$ و $F_2(-\sqrt{5}, 0)$

* الدليلان لـ (٢) هما: $(D_2): x = \frac{a^2}{c}$ و $(D_2'): x = -\frac{a^2}{c}$

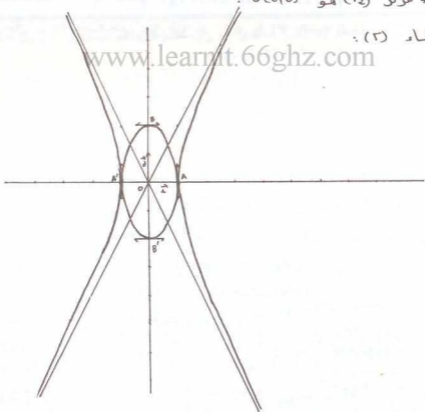
أي: $(D_2): x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $(D_2'): x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

* المقاربات لـ (٢) هما: $(A_2): y = \frac{b}{a}x$ و $(A_2'): y = -\frac{b}{a}x$

أي: $(A_2): y = 2x$ و $(A_2'): y = -2x$

* مركز (٢) هو $O(0,0)$

(٣) إنشاء (٢):



2

- المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعاود منظم $(0, \vec{\alpha}, \vec{\delta})$
- لكن (\mathcal{F}) مجموعة النقط $M(x, y)$ التي تحقّق : $y^2 - 2y - 2x - 1 = 0$
- (1) حدد لمبيعة والعناصر لـ (\mathcal{F}) .
- (2) اعط معادلة المماس (\mathcal{D}) عند النقطة $A(2, 3)$
- (3) بين أن المستقيم (\mathcal{D}) الذي معادلته : $x + 2y + 1 = 0$ مماس لـ (\mathcal{F})
- (4) أنشئ (\mathcal{F}) .

الجواب = (1) لكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى \mathcal{P}

لدينا : $M(x, y) \in (\mathcal{F}) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = 2(x+1)$$

نفج : $\begin{cases} x = x+1 \\ y = y-1 \end{cases}$

معادلة (\mathcal{F}) في المعلم $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}, \vec{\delta})$ هي : $y^2 = 2x$ ($p=1$)

ومنه : (\mathcal{F}) تملج بوترته : $F(\frac{1}{2}, 0)$ بالنسبة للمعلم $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}, \vec{\delta})$

و دليله : $F(\frac{1}{2}, 0)$ بالنسبة للمعلم $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}, \vec{\delta})$

(D) : $x = -\frac{1}{2}$ بالنسبة للمعلم $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}, \vec{\delta})$

(D) : $x = -\frac{3}{2}$ بالنسبة للمعلم $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}, \vec{\delta})$

ورأسه $\vec{\alpha}(-1, 1)$.

(2) ليكن (\mathcal{D}) المماس لـ (\mathcal{F}) عند النقطة $A(2, 3)$.

لدينا : $A \in (\mathcal{F})$ إذن معادلة (\mathcal{D}) في المعلم $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}, \vec{\delta})$

هي : $\gamma \gamma_0 = p(x + x_0)$ أي : $2(y-1) = (x+1) + 2$

ومنه : $(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

(3) لنبين أن $(\mathcal{D}) : x + 2y + 1 = 0$ مماس لـ (\mathcal{F})

لتكن : $M(x, y)$ نقطة من المستوى \mathcal{P}

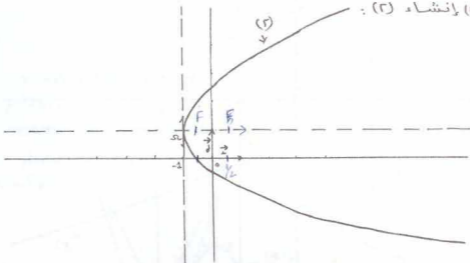
لدينا : $M(x, y) \in (\mathcal{F}) \cap (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ y^2 - 2y - 2x - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 1 \\ y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

ومنه : $(\Gamma) \cap (\Delta) = \{B(2, -1)\}$

وبالتالي : (Δ) مماس لـ (Γ) .

4) لإفتضاء (Γ) :



المستوى (3) جنسوب إلى المعلم متعامد مماسهم $(0, 2, \vec{\delta})$

www.learnit.66ghz.com

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى (3) بحيث :

$$y^2 - 2y - 2|x| - 3 = 0$$

4) بين أن (Γ) هوراتحاد جزئيين من شلجيمين .
عاشرة (Γ) .

الجواب : 1) لتكن $M(x, y)$ نقطة حد المستوى (3)

لربنا : $M(x, y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2|x| - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (y-1)^2 = 2(x+2) \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x \leq 0 \\ (y-1)^2 = -2(x-2) \end{cases}$$

نعتبر الشلجيمين (P_1) و (P_2) بحيث :

$$(P_2) : (y-1)^2 = -2(x-2)$$

$$(P_1) : (y-1)^2 = 2(x+2)$$

$$\Omega_2(2, 1) \text{ و } \begin{cases} x = x-2 \\ y = y-1 \end{cases}$$

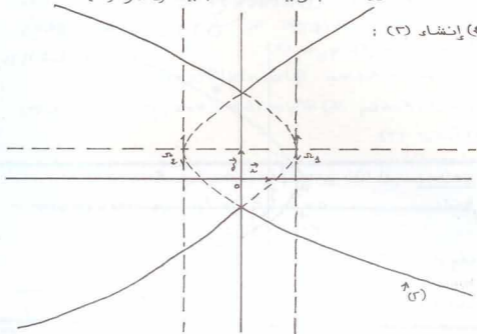
$$\Omega_1(-2, 1) \text{ و } \begin{cases} x = x+2 \\ y = y-1 \end{cases}$$

معادلة (P_2) في المعلم $(\vec{\delta})$ $(0, 2, \vec{\delta})$ هي : $y^2 = -2x$

معادلة الشلجيم (P_1) في المعلم $(\vec{\delta})$ $(0, 2, \vec{\delta})$ هي : $y^2 = 2x$

منه : (3) هو اتحاد جزئيين من التلجمين (E_1) و (E_2) .

(4) إنشاء (3) :



المستوى (3) المرسوم، الف معلم بتعداد منظم $(0, 2, \vec{y})$

4

لكن مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى (3) بحيث :

$$4mx^2 + y^2 - 8x = 0 \quad \text{حيث : } m \in \mathbb{R}$$

(1) حدد تبعاً لقيم m طبيعة (E_m) .

(2) أنشئ المنحنيين : (E_1) ، (E_2)

الجواب = (1) لكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى (3).

$$M(x, y) \in (E_m) \Leftrightarrow 4mx^2 + y^2 - 8x = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$y^2 = 8x \quad \text{م إذا كان : } m = 0 \quad \text{فإن :}$$

ومنه : (E_0) تلجم.

$$M(x, y) \in (E_m) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{m}x + \frac{y^2}{4m} = 0 \quad \text{م إذا كان : } m \neq 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{4m} = \frac{1}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{m}\right)^2}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \frac{\frac{y^2}{4m}}{\frac{1}{m}} = 1$$

* إذا كان: $m > 0$ فإن: (E_m) إهليج أو دائرة .

* إذا كان: $m < 0$ فإن: (E_m) هذلول .

(E) وإنشاء المنحنيين: (E_1) : (E_2)

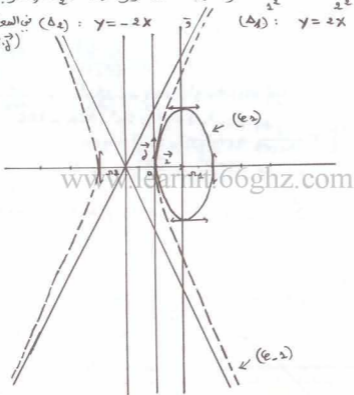
لدينا :

إهليج مركزه $(0,0)$ ورؤوسه (E_1) : $\frac{(x-2)^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

والعلم $B'(0, -2)$ و $B(0, 2)$ و $A'(-2, 0)$ و $A(2, 0)$ (E_2) : $\frac{(x+1)^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

لدينا : (E_1) هذلول مركزه $(-4, 0)$ ومقارباته :

(Δ_1) : $y = 2x$ (Δ_2) : $y = -2x$ (E_2) في المعلم (\vec{e}_1, \vec{e}_2)



المستوى (3) منسوب إلى معلم متعامد صنفيهم $(0, 2, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

5

نعتبر المستقيم (2) الذي معادلته : $x = \frac{16}{3}$

(1) إعط معادلة ديكارتية للإهليج (2) الذي دليله (3) وبؤرتيه النقطة 0

وتباعده المركزي $e = \frac{3}{5}$

(2) أنشئه (3)

3) لتكن M نقطة من (Γ) : نضع : $\theta \equiv (\vec{x}; \overrightarrow{OM})$ [2π]

أ- بين أن : $OM = \frac{16}{3+3\cos\theta}$

ب- نفترض أن : $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. المستقيم (om) يقطع (D) في I و (Γ) في M'

أحسب : $\frac{1}{om} + \frac{1}{om'} = \frac{2}{OI}$ و بين أن :

الجواب : 1) لدينا الإهليج : $(\Gamma) = \Gamma(0; 0; c)$

لتكن M(x, y) نقطة من المستوى (D) لدينا :

$M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow \frac{MO}{d(M, (D))} = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{5} \times \frac{|x - \frac{16}{3}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$

$\Leftrightarrow 25(x^2 + y^2) = 9(x - \frac{16}{3})^2$

$\Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 = 9x^2 - 96x + 256$

$\Leftrightarrow 16(x+3)^2 + 25y^2 = 400$

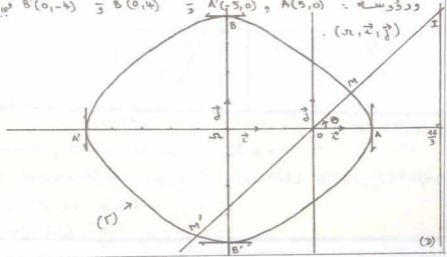
$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

ومنه معادلة الإهليج (Γ) هي : $\frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

2) إنشاء الإهليج (Γ)

لدينا : $(\Gamma) : \frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ مركزه : $\Omega(-3, 0)$

وردوسه : $A(5, 0)$ و $A'(-5, 0)$ و $B(0, 4)$ و $B'(0, -4)$ في المعلم



(3) لدينا : $(\vec{i}, \vec{OM}) \equiv \theta \quad [2\pi]$ إذن : $\begin{cases} x = OM \cos \theta \\ y = OM \sin \theta \end{cases}$

ولدينا : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow OM = \frac{2}{5} d(M, D)$

(3) : $x = \frac{16}{3} \cdot \cos \theta$

$\Leftrightarrow OM = \frac{2}{5} |OM \cos \theta - \frac{16}{3}|$

$\Leftrightarrow OM = \frac{2}{5} OM \cos \theta - \frac{16}{3}$ أو $OM = -\frac{2}{5} OM \cos \theta + \frac{16}{3}$

$\Leftrightarrow OM = \frac{-16}{5-3 \cos \theta}$ أو $OM = \frac{16}{5+3 \cos \theta}$
غير ممكن

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow OM = \frac{16}{5+3 \cos \theta}$

(ب - لدينا : $(\vec{i}, \vec{OM}') \equiv \theta + \pi \quad [2\pi]$

بمأت : $M' \in (\Gamma) : OM' = \frac{16}{5+3 \cos(\pi+\theta)} = \frac{16}{5-3 \cos \theta}$ فإن :

ومنه : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{1}{16} (5+3 \cos \theta) + \frac{1}{16} (5-3 \cos \theta)$

إذن : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{5}{8}$

ولدينا : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{1}{16} (5+3 \cos \theta) - \frac{1}{16} (5-3 \cos \theta)$

إذن : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{3}{8} \cos \theta$

ولدينا : $\cos \theta = \frac{16}{3} \times \frac{1}{OI}$ أي : $\cos \theta = \frac{\frac{16}{3}}{OI}$

ومنه : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{3}{8} \times \frac{16}{3} \times \frac{1}{OI}$

وبالتالي : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$

المستوى (3) منسوب إلى المعلم متعاود متعاود عمئهم $(0, \vec{i}, \vec{j})$

6

تعتبر (2) مجموعة التفرم $M(x, y)$ من (3) بجيت :

$$xy - x - y = 0$$

نعبر النقطة $(1, 1)$ والمتجهين : $\vec{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j})$ و $\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} - \vec{j})$

(1) حدد معادلة ديكارتية المنحنى (2) في المعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{j})$

(2) حدد طبيعة والعناصر المميزة للمنحنى (2) في المعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{j})$