السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	المتتاليات العددية	سلسلة 1

تمرين 1 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \quad ; n \geq 0 \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_4

2) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = u_n - \frac{5}{3}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول

ب) احسب v_n بدلالة n

ج) استنتج الحد العام للمتتالية (u_n) ثم احسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$

تمرين 2 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + n^2\right) \quad ; n \geq 0 \end{cases}$$

1) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $\forall n \in IN \quad v_n = u_n - \left(\frac{n^2 - 3n + 3}{2}\right)$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$

2) احسب $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$

تمرين 3 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \quad ; n \geq 0 \end{cases}$$

1) بين بالترجع أن $u_n < 3 \quad \forall n \in IN$

2) بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية .

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{1}{u_n - 3} \quad \forall n \in IN$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$

4) احسب $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$

تمرين 4 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12} \quad ; n \geq 1 \end{cases}$$

1) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث $v_n = u_n^2 - 4 \quad \forall n \in IN^*$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$

2) احسب $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$

سلسلة 1	المتتاليات العددية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1 : $;\ n\geq 0 \quad u_0=2\ ;\ u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+1$ ، $v_n=u_n-\frac{5}{3}$

1

$u_4=\frac{2}{5}u_3+1$ $u_4=\frac{422}{625}+1=\frac{1047}{125}$	$u_3=\frac{2}{5}u_2+1$ $u_3=\frac{86}{125}+1=\frac{211}{125}$	$u_2=\frac{2}{5}u_1+1$ $u_2=\frac{18}{25}+1=\frac{43}{25}$	$u_1=\frac{2}{5}u_0+1$ $u_1=\frac{4}{5}+1=\frac{9}{5}$

الهدف من السؤال هو أن تعلم أن حساب أحد حدود المتتاليات الترجعية يتطلب حساب كل الحدود التي قبله.

2

أ) لدينا: $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{5}{3}=\frac{2}{5}u_n+1-\frac{5}{3}=\frac{2}{5}u_n-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\left(v_n+\frac{5}{3}\right)-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}v_n+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}v_n$

إذن v_n متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ و حدها الأول : $v_0=u_0-\frac{5}{3}=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$

لاحظ أن $v_n=u_n-\frac{5}{3}$ تعطي: $u_n=v_n+\frac{5}{3}$ و استعملناها لأننا نبحث عن كتابة v_{n+1} بدلالة v_n

ب) $\boxed{v_n=v_0\ q^n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

ج) $\boxed{u_n=v_n+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{5}{3}}$ ، $\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\times 0+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}}$

تذكير: أن $\lim_{n\mapsto+\infty} a^n=0$ حيث : $-1<a<1$

تمرين 2 : $;\ n\geq 0 \quad u_0=\frac{5}{2};\ \ u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(u_n+n^2\right)$ ، $\forall n\in IN \quad v_n=u_n-\left(\frac{n^2-3n+3}{2}\right)$

1 أ)

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\left(\frac{(n+1)^2-3(n+1)+3}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(u_n+n^2\right)-\frac{n^2+2n+1-3n-3+3}{2}=\frac{u_n+n^2}{3}-\frac{n^2-n+1}{2}$$

$$v_{n+1}=\frac{2u_n+2n^2-3n^2+3n-3}{6}=\frac{2u_n-n^2+3n-3}{6}=\frac{2\left(v_n+\frac{n^2-3n+3}{2}\right)-n^2+3n-3}{6}$$

$$v_{n+1}=\frac{2v_n+n^2-3n+3-n^2+3n-3}{6}=\frac{1}{3}v_n$$

إذن v_n متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{3}}$ و حدها الأول : $\boxed{v_0=u_0-\frac{0-0+3}{2}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1}$

2 ب)

$\boxed{v_n=v_0\ q^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ ، $\boxed{u_n=v_n+\frac{n^2-3n+3}{2}=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n^2-3n+3}{2}}$

$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=+\infty$ ، لأن: $\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و $\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n^2-3n+3}{2}=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{2}n^2=+\infty$

3

S_n يمثل مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ إذن :

$$\boxed{S_n=v_0+v_1+....+v_n=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$$

و $\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} S_n=\frac{3}{2}(1-0)=\frac{3}{2}}$

انتبه لعدد الحدود : $n+1-0=n+1$

تمرين 3 : $;\ n\geq 0 \quad u_0=-1\ ;\ u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n} \quad ، \quad v_n=\dfrac{1}{u_n-3} \quad \forall n\in IN$

1

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=-1$ و $-1<3$
- نفترض أن $u_n<3$ و نبين أن $u_{n+1}<3$ ، لدينا :

$$u_n<3 \Rightarrow -u_n>-3 \Rightarrow 6-u_n>6-3 \Rightarrow 6-u_n>3 \Rightarrow \frac{1}{6-u_n}<\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{6-u_n}<3 \Rightarrow u_{n+1}<3$$

بالتالي وحسب مبدأ الترجع فإن: $\boxed{\forall n\in IN \quad u_n<3}$

2

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9}{6-u_n}-u_n=\dfrac{9-6u_n+u_n^2}{6-u_n}=\dfrac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$

و بما أن : $6-u_n>3>0$ فإن : $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ، بالتالي (u_n) تزايدية.

3

أ)

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-3}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{1}{\dfrac{9}{6-u_n}-3}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{1}{\dfrac{9-18+3u_n}{6-u_n}}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{6-u_n}{3u_n-9}-\frac{1}{u_n-3}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n}{3(u_n-3)}-\frac{3}{3(u_n-3)}=\frac{3-u_n}{3(u_n-3)}=\frac{-1}{3}$$

إذن v_n متتالية حسابية أساسها : $\boxed{r=\dfrac{-1}{3}}$ و حدها الأول : $\boxed{v_0=\dfrac{1}{u_0-3}=\dfrac{-1}{4}}$

ب)

$$\boxed{v_n=v_0+r\,n=\frac{-1}{4}+\frac{-1}{3}n}$$

$$\boxed{v_n=\frac{1}{u_n-3} \Rightarrow \frac{1}{v_n}=u_n-3 \Rightarrow u_n=\frac{1}{v_n}+3=\frac{1}{\dfrac{-1}{4}+\dfrac{-1}{3}n}+3}$$

$$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{\dfrac{-1}{4}+\dfrac{-1}{3}n}+3=0+3=3}$$

4

S_n يمثل مجموع حدود متتالية حسابية أساسها $r=\dfrac{-1}{3}$ إذن :

$$\boxed{S_n=v_0+v_1+....+v_n=(n+1)\frac{v_0+v_n}{2}=(n+1)\frac{\dfrac{-1}{4}+\dfrac{-1}{4}-\dfrac{1}{3}n}{2}=\frac{(n+1)\left(\dfrac{-1}{2}-\dfrac{n}{3}\right)}{2}}$$

$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} S_n=-\infty}$ (لأن : $\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} n+1=+\infty}$ و $\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty}\dfrac{-1}{2}-\dfrac{n}{3}=+\infty}$)

تمرين 4 : $;\ n\geq 1 \quad u_1=1\ ;\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12} \quad ، \quad v_n=u_n^2-4 \quad \forall n\in IN^*$

1

أ)

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}^2-4=\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\right)-4=\dfrac{u_n^2+12}{4}-4=\dfrac{u_n^2+12-16}{4}=\dfrac{u_n^2-4}{4}=\dfrac{1}{4}v_n$

إذن v_n متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\dfrac{1}{4}}$ و حدها الأول : $\boxed{v_1=u_1^2-4=1-4=-3}$

ب)

$$\boxed{v_n=v_1\,q^{n-1}=-3\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$\boxed{v_n=u_n^2-4 \Rightarrow u_n^2=v_n+4 \Rightarrow u_n=\sqrt{v_n+4}=\sqrt{-3\left(\frac{1}{4}\right)^n+4}}$$

$$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\sqrt{-3\left(\frac{1}{4}\right)^n+4}=\sqrt{-3\times 0+4}=2}$$

انتبه للحد العام للمتالية الهندسية v_n لأنه لدينا في هذا التمرين الحد الأول v_1 وليس v_0 ، أيضا

$u_n\geq 0$ لأن $u_n^2=v_n+4 \Rightarrow u_n=\sqrt{v_n+4}$

2	S_n يمثل مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ إذن : $$\boxed{S_n=v_1+....+v_n=v_1\frac{1-q^n}{1-q}=-3\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=-3\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}=-4\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}$$ منه : $\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} S_n=\lim_{n\mapsto+\infty}-4\left(1-\frac{1}{4^n}\right)=-4(1-0)=-4}$	

رياضيـــات النجــــــــاح أذ سمير لخريسي