الثانية سلك باكالوريا
مسلك العلوم الاقتصادية
مسلك علوم التدبير المحاسباتي

اتصال دالة عددية

التمرين 1 :

- **احسب النهايات التالية:**

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{3x^2+x-1}{x^2+2x-3}\ ;\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2+x-1}{x^2+2x-3}\ ;\quad \lim_{x\to 2}\frac{5x^3-2x^2-3}{x^3-1}\ ;\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-3x+2}{x-2x^2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+4}-2x\ ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}\ ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+1}+x\ ;\quad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2-3}}\ ;\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$$

التمرين 2:

- **ادرس اتصال الدالتين f و g عند 0**

$$f(x)=\begin{cases}|x-2|+1 & .x\succ 0\\ 2+\cos(x) & .x\prec 0\end{cases}\quad ;\quad g(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{|x|}{x} & .x\neq 0\\ 1 & .x=0\end{cases}$$

التمرين 3 :

1 - نعتبر الدالة f بحيث :

$$\begin{cases}f(x)=x-x^2 & .x\prec 1\\ f(x)=x-1-\sqrt{x^2-1} & .x\geq 1\end{cases}$$

✓ ادرس اتصال الدالة f عند النقطة 1.

2 - g دالة معرفة بما يلي:

$$g(x)=\sqrt{\frac{3x-1}{x-1}}$$

✓ ادرس اتصال الدالة g على D_g.

Moutamadris.ma

التمرين 4:

1) بين أن المعادلة تقبل حلا على الأقل في المجال I

- $x^4+x^2+4x-1=0$ $\quad I=[0.1]$

2) بين أن المعادلة $x^3+5x+2=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$

التمرين 5:

- f دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{x+1}{2x-5}$$

1) بين أن f تقبل دالة عكسية من D_f نحو مجال J يجب تحديده

2) حدد الدالة العكسية f^{-1} لكل x من J .

التمرين 6:

- g دالة بحيث

$$g:\begin{cases}[1.+\infty[\ \to \mathbb{R}\\ x\mapsto x+4-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\end{cases}$$

1. بين أن g تقبل دالة عكسية من $[1.+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده .
2. احسب $g^{-1}(4)$. (دون تحديد الدالة العكسية).

Moutamadris.ma

التمرين 7 :

f دالة عددية بحيث: $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+2x}{1+3x}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f .
2. بين أن f متصلة على حيز تعريفها .
3. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[0.1]$

أ - تحقق أن g تقبل دالة عكسية من $[0.1]$ نحو مجال J محددا محداته

ب - بين أن $g^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{9}$.

ج - تحقق أن $g^{-1}(x)=\left(\dfrac{1-\sqrt{-3x^2+2x+1}}{2-3x}\right)^2$ $\quad \forall x\in[0.1]-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}.$

التمرين 8

- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية من I نحو J يجب تحديده . ثم عرف f^{-1} في كل حالة من الحالات التالية:

1. $f(x)=2x-5 \quad I=\mathbb{R}.$
2. $f(x)=x^2-4x+3 \quad I=]-\infty.2]$
3. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1} \quad I=]1.+\infty[.$
4. $f(x)=x^2-x \quad I=\left]\dfrac{1}{2}.+\infty\right[.$
5. $f(x)=2x-x^2 \quad I=[1.+\infty[.$
6. $f(x)=x+\sqrt{x^2-1} \quad I=[1.+\infty[.$
7. $f(x)=x-2\sqrt{x-1}-5 \quad I=[3.+\infty[.$
8. $f(x)=x+\dfrac{1}{x} \quad I=]0.1].$
9. $f(x)=\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-x} \quad I=[0.3[.$

Moutamadris.ma

1 احسب $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ، $-1 \le x \le 1$

ب) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ ، $0 \le x \le \pi$

ج) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، $x \ge 1$

د) $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \ge 1$

الحل

أ)

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 + 2x + 1)\,dx$$

$$= \left[x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= (1 + 1 + 1) - (-1 + 1 - 1)$$

$$= 3 - (-1)$$

$$= 4$$

ب)

$$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\sin x\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos x\right]_{0}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

ج)

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1}$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

د)

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[\ln x\right]_{1}^{\infty}$$

$$= \ln\infty - \ln 1$$

$$= \infty - 0$$

$$= \infty$$

2 لتكن الدالة الخطية $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ، $0 \le x \le 2$

أ) هل $f(x)$ دالة كثافة احتمال؟

ب) احسب $P(X \le 1)$ ، $P(X \ge 1)$ ، $P(0.5 \le X \le 1.5)$

ج) ما هي الدالة التراكمية $F(x)$ ؟ ارسمها.

د) احسب $E(X)$ ، $Var(X)$ ، σ_X ، $Med(X)$ ، $Mod(X)$

الحل

أ) نعم، لأن $f(x) \ge 0$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$

ب)

$$P(X \le 1) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$P(X \ge 1) = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_1^2 = 1 + 2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{7}{4}$$

$$P(0.5 \le X \le 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_{0.5}^{1.5} = \frac{9}{4} + 1.5 - \frac{1}{16} - 0.5 = \frac{9}{4} + 1 - \frac{1}{16} = \frac{36 + 16 - 1}{16} = \frac{51}{16}$$

ج)

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 1\right)dt = \left[\frac{t^2}{4} + t\right]_0^x = \frac{x^2}{4} + x$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} + x & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

د)

$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{6} + 2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{8} + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{14}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{14}{3} - \frac{100}{9} = \frac{42 - 100}{9} = -\frac{58}{9}$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{-\frac{58}{9}} = \frac{\sqrt{58}}{3}i$$

$$Med(X) = \frac{10}{3}$$

$$Mod(X) = 2$$

3 لتكن الدالة الخطية $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ، $0 \le x \le 2$

أ) هل $f(x)$ دالة كثافة احتمال؟

ب) احسب $P(X \le 1)$ ، $P(X \ge 1)$ ، $P(0.5 \le X \le 1.5)$

ج) ما هي الدالة التراكمية $F(x)$ ؟ ارسمها.

د) احسب $E(X)$ ، $Var(X)$ ، σ_X ، $Med(X)$ ، $Mod(X)$

الحل

أ) نعم، لأن $f(x) \ge 0$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$

ب)

$$P(X \le 1) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$P(X \ge 1) = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_1^2 = 1 + 2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{7}{4}$$

$$P(0.5 \le X \le 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_{0.5}^{1.5} = \frac{9}{4} + 1.5 - \frac{1}{16} - 0.5 = \frac{9}{4} + 1 - \frac{1}{16} = \frac{36 + 16 - 1}{16} = \frac{51}{16}$$

ج)

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 1\right)dt = \left[\frac{t^2}{4} + t\right]_0^x = \frac{x^2}{4} + x$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} + x & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

د)

$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{6} + 2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{8} + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{14}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{14}{3} - \frac{100}{9} = \frac{42 - 100}{9} = -\frac{58}{9}$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{-\frac{58}{9}} = \frac{\sqrt{58}}{3}i$$

$$Med(X) = \frac{10}{3}$$

$$Mod(X) = 2$$

4 لتكن الدالة الخطية $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ، $0 \le x \le 2$

أ) هل $f(x)$ دالة كثافة احتمال؟

ب) احسب $P(X \le 1)$ ، $P(X \ge 1)$ ، $P(0.5 \le X \le 1.5)$

ج) ما هي الدالة التراكمية $F(x)$ ؟ ارسمها.

د) احسب $E(X)$ ، $Var(X)$ ، σ_X ، $Med(X)$ ، $Mod(X)$

الحل

أ) نعم، لأن $f(x) \ge 0$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$

ب)

$$P(X \le 1) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$P(X \ge 1) = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_1^2 = 1 + 2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{7}{4}$$

$$P(0.5 \le X \le 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_{0.5}^{1.5} = \frac{9}{4} + 1.5 - \frac{1}{16} - 0.5 = \frac{9}{4} + 1 - \frac{1}{16} = \frac{36 + 16 - 1}{16} = \frac{51}{16}$$

ج)

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 1\right)dt = \left[\frac{t^2}{4} + t\right]_0^x = \frac{x^2}{4} + x$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} + x & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

د)

$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{6} + 2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{8} + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{14}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{14}{3} - \frac{100}{9} = \frac{42 - 100}{9} = -\frac{58}{9}$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{-\frac{58}{9}} = \frac{\sqrt{58}}{3}i$$

$$Med(X) = \frac{10}{3}$$

$$Mod(X) = 2$$

5 لتكن الدالة الخطية $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ، $0 \le x \le 2$

أ) هل $f(x)$ دالة كثافة احتمال؟

ب) احسب $P(X \le 1)$ ، $P(X \ge 1)$ ، $P(0.5 \le X \le 1.5)$

ج) ما هي الدالة التراكمية $F(x)$ ؟ ارسمها.

د) احسب $E(X)$ ، $Var(X)$ ، σ_X ، $Med(X)$ ، $Mod(X)$

الحل

أ) نعم، لأن $f(x) \ge 0$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$

ب)

$$P(X \le 1) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$P(X \ge 1) = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_1^2 = 1 + 2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{7}{4}$$

$$P(0.5 \le X \le 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_{0.5}^{1.5} = \frac{9}{4} + 1.5 - \frac{1}{16} - 0.5 = \frac{9}{4} + 1 - \frac{1}{16} = \frac{36 + 16 - 1}{16} = \frac{51}{16}$$

ج)

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 1\right)dt = \left[\frac{t^2}{4} + t\right]_0^x = \frac{x^2}{4} + x$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} + x & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

د)

$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{6} + 2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{8} + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{14}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{14}{3} - \frac{100}{9} = \frac{42 - 100}{9} = -\frac{58}{9}$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{-\frac{58}{9}} = \frac{\sqrt{58}}{3}i$$

$$Med(X) = \frac{10}{3}$$

$$Mod(X) = 2$$

6 لتكن الدالة الخطية $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ، $0 \le x \le 2$

أ) هل $f(x)$ دالة كثافة احتمال؟

ب) احسب $P(X \le 1)$ ، $P(X \ge 1)$ ، $P(0.5 \le X \le 1.5)$

ج) ما هي الدالة التراكمية $F(x)$ ؟ ارسمها.

د) احسب $E(X)$ ، $Var(X)$ ، σ_X ، $Med(X)$ ، $Mod(X)$

الحل

أ) نعم، لأن $f(x) \ge 0$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$

ب)

$$P(X \le 1) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$P(X \ge 1) = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_1^2 = 1 + 2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{7}{4}$$

$$P(0.5 \le X \le 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_{0.5}^{1.5} = \frac{9}{4} + 1.5 - \frac{1}{16} - 0.5 = \frac{9}{4} + 1 - \frac{1}{16} = \frac{36 + 16 - 1}{16} = \frac{51}{16}$$

ج)

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 1\right)dt = \left[\frac{t^2}{4} + t\right]_0^x = \frac{x^2}{4} + x$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} + x & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

د)

$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{6} + 2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{8} + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{14}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{14}{3} - \frac{100}{9} = \frac{42 - 100}{9} = -\frac{58}{9}$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{-\frac{58}{9}} = \frac{\sqrt{58}}{3}i$$

$$Med(X) = \frac{10}{3}$$

$$Mod(X) = 2$$

ج - واستنتج أنها متقاربة وأحسب $\lim_{x \to +\infty} u_n$

الحل

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} \quad ; \quad n \in IN \end{cases}$$

2) حدد u_n بدلالة n واستنتج u_{15} (ثمن حفر المتر الخامس عشر).

3) كم مترا يمكن حفره إذا خصص صاحب المزرعة غلافا ماليا قدره 82000 درهما لهذا الغرض ؟

الحل

1) لدينا $u_1 = 100$

$u_2 = u_1 + 100 = 200$ $\qquad$ $u_3 = u_2 + 100 = 300$

2) • بما أن $u_{n+1} = u_n + 100$

Moutamadris.ma