☑ تمارين محلولة: الدوال اللوغاريتمية والدوال الآسية

⋮

1

التمرين 1.

حل في IR كل من المعادلات التالية :

1) $(\ln x)^2 - 2\ln x = 0$

2) $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$

3) $(\ln x)^3 - 27 = 0$

4) $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$

✓ الحل ▴

---

1) لنحل المعادلة $(\ln x)^2 - 2\ln x = 0$.

$(\ln x)^2 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 2)\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 2$ أو $\ln x = 0$

$\Leftrightarrow x = e^2$ أو $x = 1$

إذن $\boxed{S_1 = \{1; e^2\}}$

2) لنحل المعادلة $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$.

لدينا حلي المعادلة $x^2 + x - 2 = 0$ هما 1 و -2 ، إذن :

$(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$ أو $\ln x = -2$

$\Leftrightarrow x = e$ أو $x = e^{-2}$

إذن $\boxed{S_2 = \{e; e^{-2}\}}$

3) لنحل المعادلة $(\ln x)^3 - 27 = 0$.

لدينا : $x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

إذن : $(\ln x)^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3$

$\Leftrightarrow x = e^3$

إذن $\boxed{S_3 = \{e^3\}}$

4) لنحل المعادلة $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$.

لدينا : $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^3 - 2x^2) + (x - 2)$

$= x^2(x - 2) + (x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 + 1)$

إذن $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 2)(\ln^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 2$

$\Leftrightarrow x = e^2$

إذن $\boxed{S_4 = \{e^2\}}$

2

التمرين 2.

حل في IR كل من المتراجحات التالية :

1) $\ln(2x + 3) > 0$

2) $\ln(2x - 1) < 0$

3) $\ln(x + 2) + \ln(x - 1) \leq 2\ln 2$

4) $\ln[(x - 2)(x + 1)] \geq \ln 4$

5) $\ln\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right) \geq 0$

6) $\ln(x - 1) + \ln(x - 3) < \ln 2$

✓ الحل ▴

1) لنحل المتراجحة التالية $\ln(2x+3) > 0$

$$\ln(2x+3) > 0 \Leftrightarrow 2x+3 > 1$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

إذن $\boxed{S_1 =]-1, +\infty[}$

2) لنحل المتراجحة التالية $\ln(2x-1) < 0$

$$\ln(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < 2x-1 < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

إذن $\boxed{S_2 = \left]\frac{1}{2}; 1\right[}$

3) لنحل المتراجحة $\ln(x+2) + \ln(x-1) \leq 2\ln 2$

- شروط وجود المتراجحة هي $x+2 > 0$ و $x-1 > 0$ أي $x > 1$
-

$$\ln(x+2) + \ln(x-1) \leq 2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \ln[(x+2)(x-1)] \leq \ln(2^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ (x+2)(x-1) \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 < x \leq 2$$

إذن $\boxed{S_3 =]1; 2]}$

4) لنحل المتراجحة $\ln[(x+2)(x-1)] \geq \ln 4$

- شروط وجود المتراجحة هي $(x+2)(x-1) > 0$

أي $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$

-

$$\ln[(x+1)(x-2)] \geq \ln 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[\\ (x+1)(x-2) \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[\\ x^2 - x - 6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[\\ (x-3)(x+2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[\\ x \in]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in [3, +\infty[$$

إذن $\boxed{S_4 = [3; +\infty[}$

5) لنحل المتراجحة $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0$

- شروط وجود المتراجحة هي $\frac{x+1}{x-1} > 0$ و $x - 1 \neq 0$

أي $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \frac{x+1}{x-1} \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \frac{x+1}{x-1} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \frac{2}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$$

إذن $\boxed{S_5 =]1; +\infty[}$

6) لنحل المتراجحة $\ln(x-1) - \ln(x-3) < \ln 2$

- شروط وجود المتراجحة هي $x-1>0$ و $x-3>0$ أي $x>3$
- $\ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \ln[(x-1)(x-3)] < \ln(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-1)(x-3) < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 4x + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2 - \quad 3 < x < 2 + \quad 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3 < x < 2 + \quad 3$$

إذن $\boxed{S_6 =]3; 2 + \quad 3[}$

3 التمرين 3.

حل في IR كل من المتراجحات التالية :

(1 $(\ln x)^2 - 2\ln x < 0$

(2 $(\ln x)^2 + \ln x - 2 < 0$

(3 $(\ln x)^3 - 27 \geq 0$

(4 $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 \leq 0$

✓ الحل ▴

1) لنحل المتراجحة $(\ln x)^2 - 2\ln x > 0$

$$(\ln x)^2 - 2\ln x < 0 \Leftrightarrow (\ln x - 2)\ln x < 0$$
$$\Leftrightarrow 0 < \ln x < 2$$
$$\Leftrightarrow 1 < x < e^2$$

إذن $\boxed{S_1 =]1; e^2[}$

2) لنحل المتراجحة $(\ln x)^2 + \ln x - 2 < 0$

$$(\ln x)^2 + \ln x - 2 < 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 2) < 0$$
$$\Leftrightarrow -2 < \ln x < 1$$
$$\Leftrightarrow e^{-2} < x < e$$

إذن $S_2 =]e^{-2}; e[$

3) لنحل المتراجحة $(\ln x)^3 - 27 \geq 0$

$$(\ln x)^3 - 27 \geq 0 \Leftrightarrow (\ln x)^3 \geq 3^3$$
$$\Leftrightarrow \ln x \geq 3$$
$$\Leftrightarrow x \geq e^3$$

إذن $\boxed{S_3 =]e^3; +\infty[}$

4) لنحل المتراجحة $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 \leq 0$

$$(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (\ln x - 2)(\ln^2 x + 1) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x - 2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x \geq 2$$
$$\Leftrightarrow x \geq e^2$$

إذن $\boxed{S_4 =]e^2; +\infty[}$

4 التمرين 4.

حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n حيث :

1) $(1,05)^n \geq 2$ 2) $(0,95)^n \leq 0,2$ 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 10^{-6}$

✓ الحل ▴

1) لنحل المتراجحة $(1,05)^n \geq 2$

$$(1,05)^n \geq 2 \Leftrightarrow \ln[(1,05)^n] \geq \ln 2$$
$$\Leftrightarrow n \ln(1,05) \geq \ln 2$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1,05)}$$ (لأن $\ln(1,05) > 0$)

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\frac{\ln 2}{\ln(1,05)} \approx 14,206$

إذن $\boxed{n = 15}$

2) لنحل المتراجحة $(0,95)^n \leq 0,2$

$$(0,95)^n \leq 0,2 \Leftrightarrow \ln[(0,95)^n] \leq \ln(0,2)$$
$$\Leftrightarrow n \ln(0,95) \leq \ln(0,2)$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,95)}$$ (لأن $\ln(0,95) < 0$)

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\frac{\ln(0,2)}{\ln(0,95)} \approx 31,377$

إذن $\boxed{n = 32}$

3) لنحل المتراجحة $\left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 10^{-6}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-6} \Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \leq \ln(10^{-6})$$
$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq -6\ln(10)$$
$$\Leftrightarrow -n\ln 3 \leq -6\ln 10$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{6\ln(10)}{\ln(3)}$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\frac{6\ln(10)}{\ln(3)} \approx 12,575$

إذن $\boxed{n = 13}$

5 التمرين 5.

أحسب النهايات التالية :

$\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} (x - x\ln x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{2-\ln x}$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x-\ln x}$ ، $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+2}$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

✓ الحل ▴

- لنحسب $\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

- لنحسب $\lim_{x\to+\infty} (x - x\ln x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (x - x\ln x) &= \lim_{x\to+\infty} x(1 - \ln x)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

- لنحسب $\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{2\ln x}{x}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

- لنحسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{2-\ln x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{2-\ln x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x\left[\frac{1}{\ln x} + 1\right]}{\ln x\left[\frac{2}{\ln x} - 1\right]}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} + 1}{\frac{2}{\ln x} - 1}\\ &= -1\end{aligned}$$

- لنحسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x-\ln x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x-\ln x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[1 + \frac{\ln x}{x}\right]}{\left[1 - \frac{\ln x}{x}\right]}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}}\\ &= 1\end{aligned}$$

- لنحسب $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} (2) = 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \ln 2$$

• لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}$$
$$= 0 \times 1 = 0$$

• لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+2}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x+2}$$
$$= 0 \times 1 = 0$$

• لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x^2}$$
$$= 0 \times 0 = 0$$

• لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^3}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{x^3}$$
$$= 0 \times 0 = 0$$

• لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$
$$= 0$$

6

التمرين 6.

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x - \ln x) \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ln(1-x)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1+\ln x}{2-\ln x} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x+\ln x}{x-\ln x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x^2+2}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-3x)}{x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+5x+x^2)}{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

✓ الحل ▴

• لنحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x - \ln x)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x - \ln x) = +\infty$$

• لنحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} [x \ln x - x \ln(x+1)]$$

$$= 0$$

• لنحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(1-x)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x) = 0\\[2mm] 1-x>0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(1-x) = -\infty$$

• لنحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1+\ln x}{2-\ln x}$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1+\ln x}{2-\ln x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x\left[\dfrac{1}{\ln x}+1\right]}{\ln x\left[\dfrac{2}{\ln x}-1\right]}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\dfrac{1}{\ln x}+1}{\dfrac{2}{\ln x}-1}$$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\ln x} = 0$)

$$= -1$$

• لنحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x+\ln x}{x-\ln x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x\left[\dfrac{x}{\ln x}+1\right]}{\ln x\left[\dfrac{x}{\ln x}-1\right]}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x\times\dfrac{1}{\ln x}+1}{x\times\dfrac{1}{\ln x}-1}$$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\times\dfrac{1}{\ln x} = 0$)

$$= -1$$

• لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x-1}{x^2+2}\right)$:

$$\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x^2+2}\right) = -\infty$$

• لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x}\times 2$$

$$= 1\times 2 = 2$$

• لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x)}{x}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(-3x)]}{(-3x)}\times(-3)$$

$$= 1\times(-3) = -3$$

• لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{x^2}$$

$$= 1\times(+\infty) = +\infty$$

• لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+5x+x^2)}{x}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(5x+x^2)]}{(5x+x^2)}\times\frac{5x+x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(5x+x^2)]}{(5x+x^2)}\times(5+x)$$

$$= 1 \times 5 = 5$$

• لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$:

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to t \\ t > 0}} \frac{\ln(1+t)}{t} \qquad \left(\text{بوضع } t = \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1$$

• لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to t \\ t > 0}} \frac{\ln(1+t)}{t} \times \frac{1}{t} \quad \left(\text{بوضع } t = \frac{1}{x}\right)$$

$$= +\infty$$

7 التمرين 7.

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

1) أ ـ حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب ـ أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f.

2) أ ـ أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$.

ب ـ أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار $(+\infty)$.

✓ الحل ▴

---

1) أ ـ

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$$

$$D_f = \{x \in IR / x > 0 \quad x - 2 \neq 0\} =]0;2[\ U \ ]2,+\infty[$$

ب ـ

$$\left(\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty\right) \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty\right) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left(\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \ln x = \ln 2\right) \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$$

$$\left(\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \ln x = \ln 2\right) \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

2) أ ـ

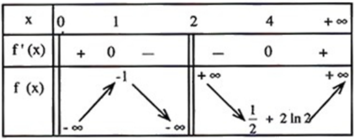
$$\forall x \in D_f \ ; f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x-4)}{x(x-2)^2}$$

ب ـ جدول تغيرات الدالة f.



3) لنحسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x - 2)} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

إذن محور الأفاصيل اتجاه مقارب لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

التمرين 8.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{2 + \ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

ب ـ أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

2) أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم إعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أ ـ بين أن : $f''(x) = \frac{3 \ln x - 2}{4x^2 \ \ x}$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$

ب ـ استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يجب تحديد إحداثيتيها.

4) أ ـ حدد إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع محور الأفاصيل.

ب ـ أنشئ المنحنى (C) (نأخذ $e^{\frac{2}{3}} \approx 1,9$ و $e^{\frac{1}{3}} \approx 1,9$ و $e^{-2} \approx 0,1$)

5) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = 2 \ \ x \ln x$.

أ ـ بين أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0, +\infty[$.

ب ـ حدد الدالة الأصلية φ للدالة f التي تنعدم في 4.

✓ الحل ▴

$$f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$$

1) أ ـ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 2 \frac{\ln \ \ x}{x} \right) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} (2 + \ln x) = -\infty$$

ب ـ • بما أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ فإن محور الأفاصيل مقارب أفقي

Moutamadris.ma