

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية	سلسلة 1
<p>تمرين 1: اكتب الأعداد العقدية التالية على الشكل الجبري:</p> $z_3 = (i+2)^3, \quad z_2 = (7i-1)^2, \quad z_1 = (5i-1)(i+3)$ $z_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30}, \quad z_5 = \frac{5}{2-i} + \frac{3-i}{2+i}, \quad z_4 = (3-i)^4$		
<p>تمرين 2: حل في C المعادلات:</p> $(z+2\bar{z})^2 + 1 = 0, \quad z\bar{z} + 3(z-\bar{z}) = 13 + 18i, \quad (1-i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i, \quad 5z + 7\bar{z} + 4i - 3 = 0$		
<p>تمرين 3: نعتبر العدد العقدي $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$</p> <p>(1) تحقق أن: $j^2 + j + 1 = 0$ ثم استنتج أن $j^3 = 1$</p> <p>(2) احسب المجموع: $S = 1 + j + j^2 + j^3 + \dots + j^{2014}$</p>		
<p>تمرين 4: ليكن $z \in C - \left\{\frac{-i}{2}\right\}$ حيث $z = 1$ نضع: $u = \frac{z+2i}{2z+i}$</p> <p>بين أن: $u = 1$</p>		
<p>تمرين 5: ليكن a و b عددين عقديين حيث $a \neq b$ و $a = b = 1$</p> <p>بين أن: $\forall z \in C \quad \frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}$</p>		
<p>تمرين 6: a و b و c أعداد عقدية مختلفة مثنى مثنى.</p> <p>(1) بين جبرياً أن: $\frac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow a-b ^2 + a-c ^2 = b-c ^2$</p> <p>(2) أول النتيجة المحصل عليها هندسياً</p>		
<p>تمرين 7: المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. حدد طبيعة المجموعات التالية.</p> $F = \left\{ M(z) / z-2i+1 = z+i-3 \right\} \quad \text{و} \quad E = \left\{ M(z) / 5z+3\bar{z}+2-i \in \mathbb{R} \right\}$ $V = \left\{ M(z) / \frac{\bar{z}+2}{z+2} \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{و} \quad H = \left\{ M(z) / \frac{z+2}{z} \in i\mathbb{R} \right\} \quad \text{و} \quad K = \left\{ M(z) / (z+3i-1)(\bar{z}+2) \in i\mathbb{R} \right\}$		

سلسلة 1	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
تمرين 1 :		
$z_3 = (i+2)^3$ $z_3 = i^3 + 3 \times i^2 \times 2 + 3 \times i \times 2^2 + 2^3$ $z_3 = -i - 6 + 12i + 8$ $z_3 = 2 + 11i$	$z_2 = (7i-1)^2$ $z_2 = (7i)^2 - 14i + 1$ $z_2 = 49 - 14i + 1$ $z_2 = -48 - 14i$	$z_1 = (5i-1)(i+3)$ $z_1 = 5i^2 + 15i - i - 3$ $z_1 = -5 + 14i - 3$ $z_1 = -8 + 14i$
$z_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30}$ $z_6 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^{15}$ $z_6 = \left(\frac{2}{4} + i - \frac{2}{4}\right)^{15}$ $z_6 = i^{15} = (i^2)^7 \times i = -i$	$z_5 = \frac{5}{2-i} + \frac{3-i}{2+i}$ $z_5 = \frac{5(2+i) + (3-i)(2-i)}{2^2 - i^2} + \frac{(3-i)(2-i)}{2^2 - i^2}$ $z_5 = \frac{10+5i}{4+1} + \frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}$ $z_5 = \frac{10+5i+6-5i-1}{5} = \frac{15}{5} = 3$	$z_4 = (3-i)^4$ $z_4 = [(3-i)^2]^2$ $z_4 = (9-6i+i^2)^2$ $z_4 = (9-6i-1)^2$ $z_4 = (8-6i)^2$ $z_4 = 64 - 96i + (6i)^2$ $z_4 = 64 - 96i - 36$ $z_4 = 28 - 96i$
تمرين 2 :		
$S = \left\{\frac{1}{4} + 2i\right\}$	$z = \frac{1}{4} + 2i$	<p>بوضع $z = x + iy$ نجد :</p> $5z + 7\bar{z} + 4i - 3 = 0$ $5(x+iy) + 7(x-iy) + 4i - 3 = 0$ $5x + 5iy + 7x - 7iy + 4i - 3 = 0$ $12x - 2iy = 3 - 4i$
$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -4x + y = 4 \end{cases}$	$(1-i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i$ $(1-i)(x+iy) - 3i(x-iy) = 1 + 4i$ $x + iy - ix + y - 3ix - 3y = 1 + 4i$ $(x-2y) + (y-4x)i = 1 + 4i$	<p>بوضع $z = x + iy$ نجد $(x, y) \in \mathbb{R}^2$</p> $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 = -7$ $S = \left\{\frac{-9}{7} - \frac{8}{7}i\right\}$
$\begin{cases} y = 3 \\ x^2 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 6y = 18 \end{cases}$	<p>بوضع $z = x + iy$ نجد $(x, y) \in \mathbb{R}^2$</p> $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 13 + 18i$ $x^2 + y^2 + 3(2iy) = 13 + 18i$ <p>منه : $\begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$</p>
<p>لدينا $z + 2\bar{z} - i = 0$ أو $z + 2\bar{z} + i = 0$ منه $(z + 2\bar{z})^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z + 2\bar{z})^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (z + 2\bar{z} + i)(z + 2\bar{z} - i) = 0$</p>		

الآن بوضع: $z = x + iy$ نجد: $x + yi + 2x - 2iy - i = 0$ أو $x + yi + 2x - 2iy + i = 0$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

منه: $3x - yi = i$ أو $3x - yi = -i$ منه: $\begin{cases} 3x = 0 \\ -y = -1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 3x = 0 \\ -y = 1 \end{cases}$ بالتالي: $S = \{i; -i\}$

تمرين 3: نعتبر العدد العقدي $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$j^2 + j + 1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} + \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{4} + \frac{-1}{2} + 1 = 0$$

لنستنتج أن: $j^3 = 1$

طريقة 2

طريقة 1

1

بما أن: $j^3 - 1 = (j-1)(j^2 + j + 1) = 0$
فإن: $j^3 = 1$

بما أن $j^2 = -j - 1$ ، فإن:
 $j^3 = j j^2 = j(-j - 1)$
 $j^3 = -j^2 - j = -(-j - 1) - j = j + 1 - j = 1$

$$S = 1 + j + j^2 + j^3 + \dots + j^{2014}$$

بما أن $j \neq 1$ فإن: $S = 1 \times \frac{1 - j^{2015}}{1 - j} = \frac{1 - j^{2013} \times j^2}{1 - j} = \frac{1 - (j^3)^{671} \times j^2}{1 - j} = \frac{1 - j^2}{1 - j} = \frac{(1 - j)(1 + j)}{1 - j} = 1 + j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين 4: ليكن $z \neq \frac{-i}{2}$ حيث $|z| = 1$ نضع: $u = \frac{z + 2i}{2z + i}$

بما أن $|z| = 1$ فإن: $z \bar{z} = 1$ منه: $\bar{z} = \frac{1}{z}$

لدينا: $u \cdot \bar{u} = \left(\frac{z + 2i}{2z + i}\right) \left(\frac{\bar{z} - 2i}{2\bar{z} - i}\right) = \left(\frac{z + 2i}{2z + i}\right) \left(\frac{\frac{1}{z} - 2i}{2\frac{1}{z} - i}\right) = \left(\frac{z + 2i}{2z + i}\right) \left(\frac{1 - 2zi}{2 - zi}\right) = \frac{z - 2z^2i + 2i + 4z}{4z - 2z^2i + 2i + z} = 1$

بالتالي: $|u|^2 = 1$ أي: $|u| = 1$

تمرين 5: ليكن a و b عددين عقديين حيث $a \neq b$ و $|a| = |b| = 1$.

لدينا $|a| = |b| = 1$ منه: $\bar{a} = \frac{1}{a}$ منه $\bar{b} = \frac{1}{b}$

الآن: $\overline{\left(\frac{z + ab\bar{z} - (a + b)}{a - b}\right)} = \frac{\bar{z} + \bar{a}\bar{b}\bar{z} - (\bar{a} + \bar{b})}{\bar{a} - \bar{b}} = \frac{\bar{z} + \frac{1}{ab}z - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab\bar{z} + z - (b + a)}{b - a} = -\left(\frac{z + ab\bar{z} - (a + b)}{a - b}\right)$

بالتالي: $\frac{z + ab\bar{z} - (a + b)}{a - b} \in i\mathbb{R}$

🌟 لاحظ التكافؤ الهام: $\bar{\bar{a}} = a$ و $|a| = 1 \Leftrightarrow \bar{a} = \frac{1}{a}$ و $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z$

تمرين 6: a و b و c أعداد عقدية مختلفة مثني مثني.

$$|a - b|^2 + |a - c|^2 = |b - c|^2 \Leftrightarrow (a - b)(\overline{a - b}) + (a - c)(\overline{a - c}) = (b - c)(\overline{b - c})$$

$$|a - b|^2 + |a - c|^2 = |b - c|^2 \Leftrightarrow (a - b)(\overline{a - b}) + (a - c)(\overline{a - c}) = (b - c)(\overline{b - c})$$

$$|a - b|^2 + |a - c|^2 = |b - c|^2 \Leftrightarrow a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{b} + a\bar{a} - a\bar{c} - c\bar{a} + c\bar{c} = b\bar{b} - b\bar{c} - c\bar{b} + c\bar{c}$$

$$|a - b|^2 + |a - c|^2 = |b - c|^2 \Leftrightarrow 2a\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b} = a\bar{b} + b\bar{a} + a\bar{c} + c\bar{a}$$

لدينا:

1

و

$$\frac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\bar{b}-\bar{a}}{c-a} = \frac{a-b}{c-a} \Leftrightarrow \bar{b}c - \bar{b}a - \bar{a}c + \bar{a}a = a\bar{c} - a\bar{a} - b\bar{c} + b\bar{a}$$

و من جهة أخرى :

$$\frac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow 2a\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b} = a\bar{b} + b\bar{a} + a\bar{c} + c\bar{a}$$

$$|a-b|^2 + |a-c|^2 = |b-c|^2 \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R} \text{ بالتالي}$$

باعتبار النقط في معلم م.م.م $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ، فالعبارة المحصل عليها تعني :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow (AB) \perp (AC)$$

وهي تعبر عن مبرهنتي فيثاغورس المباشرة و العكسية.

2

تمرين 7 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. حدد طبيعة المجموعات التالية.

$$z = x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ نضع : } E = \{M(z) / 5z + 3\bar{z} + 2 - i \in \mathbb{R}\}$$

$$M \in E \Leftrightarrow 5x + 5iy + 3x - 3iy + 2 - i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 8x + 2 + 2iy - i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

بالتالي E هي المستقيم ذو المعادلة: $(E): y = \frac{1}{2}$

$$F = \{M(z) / |z - 2i + 1| = |z + i - 3|\}$$

$$M \in F \Leftrightarrow |z - (-1 + 2i)| = |z - (3 - i)| \Leftrightarrow BM = AM, \text{ و } B(-1 + 2i) \text{ و } A(3 - i)$$

إذن: F هو المستقيم واسط القطعة $[AB]$

أحيانا الحل الهندسي يكون جد بسيط مقارنة بالحل الجبري، خصوصا أنه طلب منا فقط تحديد طبيعة المجموعة (دائرة، مستقيم....)

$$K = \{M(z) / (z + 3i - 1)(\bar{z} + 2) \in i\mathbb{R}\}$$

$$M \in K \Leftrightarrow \overline{(z + 3i - 1)(\bar{z} + 2)} = -(z + 3i - 1)(\bar{z} + 2) \Leftrightarrow (\bar{z} - 3i - 1)(z + 2) + (z + 3i - 1)(\bar{z} + 2) = 0$$

$$M \in K \Leftrightarrow z\bar{z} + 2\bar{z} - 3iz - 6i - z - 2 + \bar{z}z + 2z + 3i\bar{z} + 6i - \bar{z} - 2 = 0$$

لدينا :

$$M \in K \Leftrightarrow 2z\bar{z} + \bar{z} + 3i\bar{z} - 3iz + z - 4 = 0$$

الآن بوضع $z = x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2$ نجد:

$$M \in K \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + x - iy + 3i(x - iy) - 3i(x + iy) + x + iy - 4 = 0$$

$$M \in K \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2x + 3xi + 3y - 3xi + 3y - 4 = 0$$

$$M \in K \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y - 4 = 0$$

$$M \in K \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + 3y - 2 = 0$$

$$M \in K \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$$

$$M \in K \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{18}{4}$$

إذن K هي الدائرة ذات المركز $\Omega\left(\frac{-1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$ و الشعاع $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

لاحظ أنه من الأفضل أن نبدأ بتبسيط تعبير المجموعة إلى أن نصل مرحلة ينتهي التبسيط، إذاك نضع $z = x + iy$ ، فليس من المفيد دائما استعمال هذا الوضع من البداية كما هو الشأن في المجموعة الأولى.

في هذا المثال يمكن الوضع من البداية وربما لن يكون هناك اختلاف كبير في الحسابات، لكن في أمثلة أخرى يكون الفرق واضحا.

$$H = \left\{M(z) / \frac{z+2}{z} \in i\mathbb{R}\right\} \text{ لدينا :}$$

$$M \in H \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+2}{z}\right)} = -\frac{z+2}{z} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}} + \frac{z+2}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{z}\bar{z} + 2z + \bar{z}\bar{z} + 2\bar{z}}{\bar{z}z} = 0 \Leftrightarrow 2\bar{z}\bar{z} + 2z + 2\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \bar{z}\bar{z} + z + \bar{z} = 0$$

الآن بوضع $z = x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2$ نجد: $M \in H \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$

إذن H هي الدائرة ذات المركز $\Omega(-1;0)$ و الشعاع $r=1$

$$V = \left\{ M(z) / \frac{\bar{z}+2}{z+2} \in \mathbb{R} \right\} \text{، لدينا :}$$

$$M \in V \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{\bar{z}+2}{z+2} \right)} = \frac{\bar{z}+2}{z+2} \Leftrightarrow \frac{z+2}{\bar{z}+2} = \frac{\bar{z}+2}{z+2} \Leftrightarrow (z+2)^2 = (\bar{z}+2)^2 \Leftrightarrow (z+2)^2 - (\bar{z}+2)^2 = 0 \Leftrightarrow (z+\bar{z}+4)(z-\bar{z}) = 0$$

الآن بوضع $z = x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2$ نجد: $M \in V \Leftrightarrow (2x+4)(2iy) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } y = 0$

إذن V هي اتحاد المستقيمين $(D_1): x = -2$ و $(D_2): y = 0$

الأمثلة أعلاه مختارة بعناية بغية التعريف فمختلف طرق تحديد مثل هذه المجموعات.

رياضيات النجاح أذ سمير لخريسي
www.naja7matfi.com