السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الحسابيات	سلسلة 1

تمرين 1 : a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان

- حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 145^{2015} على 12
- حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 247^{2015} على 7
- حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 2015^{2016} على 11
- بين أن : $\forall n \in IN \quad 7 / 3^{2n} + 3 \times 2^{n+1}$
- بين أن : $\forall n \in IN^* \quad (n-1)^2 / n^{n-1} - 1$

تمرين 2 : a و b و c عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان

1) بين أن : $(7a+3) \wedge (9a+4) = 1$

2) بين أن : $(9a+4b) \wedge (2a+b) = a \wedge b$

3) مستعملا مبرهنة «Bezout» برهن أن : $a \wedge (bc) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases}$

أ) بين أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow (a+b) \wedge ab = 1$

ب) بين أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow (a^3 - b^3) \wedge (a^2 - b^2) = a - b$

ج) بين أن : $(a^2 + b^2) \wedge ab = (a \wedge b)^2$

4) مستعملا مبرهنة «Bezout» برهن أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^2 \wedge b^2 = 1$

أ) بين أن : $a^2 / b^2 \Rightarrow a / b$

ب) بين أن : $a^2 \wedge b^2 = (a \wedge b)^2$

ج) بين أن : $\sqrt{5} \notin Q$

5) بين بالترجع أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow \left(\forall n \in IN^* \quad a \wedge b^n = 1 \right)$

أ) استنتج أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow \left(\forall (n,m) \in IN^* \times IN^* \quad a^n \wedge b^m = 1 \right)$

ب) بين أن : $\log_{10}(2) \notin Q$

تمرين 3 : حل في Z^2 المعادلات التالية :

$10x = 14y$	$3x - 2y = 1$	$17x + 11y = 1$
$5x - 3y = 7$	$10x - 2y = 6$	$15x + 6y = 11$

تمرين 4 : a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان .

1) بين أن : $(a+b) \wedge ab = 1 \Leftrightarrow \quad a \wedge b = 1$

2) استنتج أنه لكل x و y من IN^* : $(x+y) \wedge (x \vee y) = x \wedge y$

3) حل في $IN^* \times IN^*$ النظمة : $\begin{cases} x + y = 276 \\ x \vee y = 1440 \\ x < y \end{cases}$

سلسلة 1	الحسابيات حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

لدينا : $145 \equiv 1[12]$ منه : $145^{2015} \equiv 1[12]$ إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 145^{2015} على 12 هو 1

لدينا : $247 \equiv 2[7]$ منه : $247^3 \equiv 8[12]$ منه : $247^3 \equiv 1[17]$ (لأن : $8 \equiv 1[7]$)

علما أن : $2015 = 3\times 671 + 2$ فإن : $\begin{cases} 247^{3\times 671} \equiv 1[7] \\ 247^2 \equiv 2^2[7] \end{cases}$ ومنه : $247^{2015} \equiv 4[7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 247^{2015} على 7 هو 4

لدينا : $2015 \equiv 2[11]$ منه : $2015^5 \equiv 32[11]$ منه: $2015^5 \equiv -1[11]$ (لأن : $32 \equiv -1[11]$)

علما أن : $2016 = 5\times 403 + 1$ فإن : $\begin{cases} 2015^{5\times 403} \equiv (-1)^{403} \equiv -1[11] \\ 2015 \equiv 2[11] \end{cases}$ و منه : $2015^{2016} \equiv -2 \equiv 9[11]$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 2015^{2016} على 11 هو 9

لدينا : $9 \equiv 2[7]$ منه : $9^n \equiv 2^n[7]$ منه: $9^n + 3\times 2^{n+1} \equiv 2^n + 3\times 2^{n+1}[7]$ منه : $9^n + 3\times 2^{n+1} \equiv 7\times 2^n \equiv 0[7]$

بالتالي : $7/3^{2n} + 3\times 2^{n+1} \quad \forall n \in IN$

بالنسبة للقيم $n=1$ و $n=2$ العبارة صحيحة، الآن ليكن : $n>2$

$$1 \equiv 1[n-1]$$
$$n \equiv 1[n-1]$$

لدينا : $n^{n-1} - 1 = (n-1)(n^{n-2} + n^{n-3} + ... + n + 1)$ و بما أن : $n^k \equiv 1[n-1]$ (لأن : $n \equiv 1[n-1] \Rightarrow n^k \equiv 1[n-1]$)

$$... \equiv ...$$
$$n^{n-2} \equiv 1[n-1]$$

فإن : $n^{n-2} + n^{n-3} + ... + n + 1 \equiv n-1 \equiv 0[n-1]$ منه : $n-1/n^{n-2} + n^{n-3} + ... + n + 1$

منه : $\exists m \in Z/\ n^{n-2} + n^{n-3} + ... + n + 1 = m(n-1)$ منه : $n^{n-1} - 1 = m(n-1)^2$

بالتالي : $(n-1)^2 / n^{n-1} - 1 \quad \forall n \in IN^*$

تمرين 2 :

1

نضع: $d = (7a+3)\wedge(9a+4)$

منه : $\begin{cases} d/7a+3 \\ d/9a+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/63a+27 \\ d/63a+28 \end{cases} \Rightarrow d/(63a+28)-(63a+27) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$

بالتالي : $(7a+3)\wedge(9a+4) = 1$

2

نضع : $d = a\wedge b$ و $\delta = (9a+4b)\wedge(2a+b)$

منه : $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2a \ \ et\ d/9a \\ d/b \ \ et\ \ d/4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2a+b \\ d/9a+4b \end{cases} \Rightarrow d/\delta$

و : $\begin{cases} \delta/2a+b \\ \delta/9a+4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/8a+4b\ \ et\ \delta/9a+4b \\ \delta/18a+9b\ \ et\ \delta/18a+8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/a \\ \delta/b \end{cases} \Rightarrow \delta/d$

منه : $\delta = d$ أي : $(9a+4b)\wedge(2a+b) = a\wedge b$

3

لدينا من جهة : $\begin{cases} a\wedge b = 1 \\ a\wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\,u + b(cv) = 1 \\ a\,u + c(bv) = 1 \end{cases} \Rightarrow \exists (u,v)\in Z^2\ /\ a\,u + bc\,v = 1 \Rightarrow a\wedge(bc) = 1$

$$\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists(u_1,v_1)\in Z^2 \ / \ a u_1+b v_1=1 \\ \exists(u_2,v_2)\in Z^2 \ / \ a u_2+c v_2=1 \end{cases} \Rightarrow (a u_1+b v_1)(a u_2+c v_2)=1$$

وعكسيا :

$$\Rightarrow (a u_1 u_2+c v_2 u_1+b v_1 u_2)a+(v_1 v_2)bc=1$$

$$\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases} \Rightarrow a\wedge(bc)=1$$

بالتالي : $\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a\wedge(bc)=1$

أ)

ليكن : $a\wedge b=1$ ، نضع : $d=(a+b)\wedge a$ و $\delta=(a+b)\wedge b$

لدينا : $d=(a+b)\wedge a \Rightarrow \begin{cases} d/a+b \\ d/a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/b \\ d/a \end{cases} \Rightarrow d/a\wedge b \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1 \Rightarrow (a+b)\wedge a=1$

و : $\delta=(a+b)\wedge b \Rightarrow \begin{cases} \delta/a+b \\ \delta/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/a \\ \delta/b \end{cases} \Rightarrow \delta/a\wedge b \Rightarrow \delta/1 \Rightarrow \delta=1 \Rightarrow (a+b)\wedge b=1$

الآن : $\begin{cases} (a+b)\wedge a=1 \\ (a+b)\wedge b=1 \end{cases} \Rightarrow (a+b)\wedge a b=1$

ب)

ليكن : $a\wedge b=1$

لدينا : $(a^3-b^3)\wedge(a^2-b^2)=(a-b)(a^2+ab+b^2)\wedge(a-b)(a+b)=(a-b)\left((a^2+ab+b^2)\wedge(a+b)\right)$

نضع : $d=(a^2+ab+b^2)\wedge(a+b)$ ، منه و باستعمال نتيجة السؤال السابق نجد :

$$\begin{cases} d/a+b \\ d/(a+b)^2-ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/(a+b)^2 \\ d/(a+b)^2-ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a+b \\ d/ab \end{cases} \Rightarrow d/(a+b)\wedge ab \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

بالتالي : $a\wedge b=1 \Rightarrow (a^3-b^3)\wedge(a^2-b^2)=a-b$

ج)

نضع : $d=a\wedge b$ منه : $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \ \begin{cases} a=\alpha d \\ b=\beta d \end{cases} / \alpha\wedge\beta=1$

منه : $(a^2+b^2)\wedge a b=\left(d^2(\alpha^2+\beta^2)\right)\wedge d^2\alpha\beta=d^2\left((\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha\beta\right)$

نضع : $d=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha$ و $\delta=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta$

لدينا حسب نتيجة سابقة : $\alpha\wedge\beta=1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\wedge\beta=1 \\ \alpha\wedge\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\wedge\beta\times\beta=1 \\ \alpha\times\alpha\wedge\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\wedge\beta^2=1 \\ \alpha^2\wedge\beta=1 \end{cases}$

منه : $d=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha \Rightarrow \begin{cases} d/\alpha^2+\beta^2 \\ d/\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/\alpha^2+\beta^2 \\ d/\alpha^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/\beta^2 \\ d/\alpha \end{cases} \Rightarrow d/\alpha\wedge\beta^2 \Rightarrow d=1$

و : $\delta=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2+\beta^2 \\ \delta/\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2+\beta^2 \\ \delta/\beta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2 \\ \delta/\beta \end{cases} \Rightarrow \delta/\alpha^2\wedge\beta \Rightarrow \delta=1$

الآن : $\begin{cases} (\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha=1 \\ (\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta=1 \end{cases} \Rightarrow (\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha\beta=1$ بالتالي : بين أن : $(a^2+b^2)\wedge a b=d^2=(a\wedge b)^2$

لدينا :

$$a\wedge b=1 \Rightarrow \exists(u,v)\in Z^2 \ / \ a u+b v=1 \Rightarrow au=1-bv \Rightarrow a^2u^2=1-2bv+b^2v^2$$

$$\Rightarrow 2bv=1+b^2v^2-a^2u^2 \Rightarrow 4b^2v^2=1+b^4v^4+a^4u^4+2b^2v^2-2a^2u^2-2a^2b^2u^2v^2$$

$$\Rightarrow a^2(2u^2+2b^2u^2v^2-a^2u^4)+b^2(2v^2-b^2v^4)=1$$

$$a\wedge b=1 \Rightarrow a^2\wedge b^2=1$$

4

أ)

ليكن : a^2/b^2 و نضع : $d=a\wedge b$

إذن : $\exists k\in IN^2 \ \ b^2=k a^2$ و $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \ \begin{cases} a=\alpha d \\ b=\beta d \end{cases} / \alpha\wedge\beta=1$

منه : $d^2\beta^2=k d^2\alpha^2$ منه : $\beta^2=k\alpha^2$ منه : α^2/β^2 وحيث أن : α^2/α^2 فإن: $\alpha^2/\alpha^2\wedge\beta^2$

		وبما أن : $\alpha^2\wedge\beta^2=1 \Rightarrow \alpha\wedge\beta=1$ فإن : $\alpha^2/1$ منه: $\alpha=1$ منه : $\begin{cases} a=d \\ b=\beta d\end{cases}$ منه : $b=a\,d$ بالتالي : a/b
	ب)	بوضع : $d=a\wedge b$ نستنتج أن : $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \quad \begin{cases} a=\alpha\, d \\ b=\beta\, d\end{cases} /\alpha\wedge\beta=1$ و باستعمال نتيجة السؤال ج) نجد : $a^2\wedge b^2=d^2(\alpha^2\wedge\beta^2)=d^2\times 1=d^2=(a\wedge b)^2$
	ج)	نفترض أن : $\sqrt{5}\in Q$ إذن : $\exists(a,b)\in IN\times IN^* \;/\; \sqrt{5}=\frac{a}{b}$ منه : $5b^2=a^2$ منه: b^2/a^2 و باستعمال نتيجة السؤال أ) نستنتج أن : b/a منه : $\exists k\in IN \;/\; a=kb$ منه : $5b^2=k^2b^2$ منه : $5=k^2$ وبما أن: $4<5<9$ فإن : $4<k^2<9$ منه : $2<k<3$ و هذا غير ممكن بالتالي : $\sqrt{5}\notin Q$
5	أ)	ليكن $a\wedge b=1$ و لنبين بالترجع أن : $\left(\forall n\in IN^* \quad a\wedge b^n=1\right)$ بالنسبة لـ $n=1$: العبارة صحيحة الآن نفترض أن : $a\wedge b^n=1$ و لنبين أن: $a\wedge b^{n+1}=1$ باستعمال نتيجة السؤال 3) نجد بسهولة أن : $\begin{cases} a\wedge b^n=1 \\ a\wedge b=1\end{cases} \Rightarrow a\wedge b^n\times b=1 \Rightarrow a\wedge b^{n+1}=1$ و هذا ينهي البرهان.
		يجب الانتباه جيدا للعبارة، الافتراض لا يجب أن يتم على العبارة ككل بل على نتيجة الاستلزام فقط (إنه المنطق الرياضي)
	ب)	ليكن : $(n,m)\in IN^*\times IN^*$ ، باستعمال نتيجة السؤال السابق مرتين نجد أن: استنتج أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow a\wedge b^m=1 \Rightarrow b^m\wedge a=1 \Rightarrow b^m\wedge a^n=1 \Rightarrow a^m\wedge b^m=1$
		نتيجة هذا السؤال هي خاصية بالدرس يمكن استعمالها دون برهان، لذلك فالهدف من السؤال هو تقديم برهان هذه الخاصية نفس الشيء ينطبق على السؤال الثالث
	ج)	نفترض أن : $\log_{10}(2) \in Q$ إذن : $\exists\in(m,n)\in Z\times IN^* \;/\; 2^{\frac{m}{n}}=10$ منه : $2^m=10^n$ منه : منه : $2^m=2^n\times 5^n$ منه : $5^n/2^m$ و حيث أن : $5^n/5^n$ فإن : $5^n/2^m\wedge 5^n$ و لكون : $2\wedge 5=1$ فحسب السؤال السابق نستنتج أن: $2^m\wedge 5^n=1$ منه : $5^n/1$ أي : $5^n=1$ منه : $n=0$ و هذا يناقض كون : $n\in IN^*$ بالتالي : $\log_{10}(2) \notin Q$

الهدف من هذا التمرين هو التمكن من استعمال القواعد الهامة التالية:

- مبرهنة Bezout (لأنها أحينا تكون الوسيلة الوحيدة للبرهان)
- $a\wedge(bc)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1\end{cases}$ ، $a\wedge b=1 \Rightarrow a^m\wedge b^m=1$ ، $d=a\wedge b \Rightarrow \exists(\alpha,\beta)\in Z^2 \begin{cases} a=\alpha\, d \\ b=\beta\, d\end{cases} /\alpha\wedge\beta=1$
- مبرهنة كوص(Gauss): $\begin{cases} a/bc \\ a\wedge b\end{cases} \Rightarrow a/c$ ، $ac\wedge bc=c(a\wedge b)$

تمرين 3 :

لدينا : $\begin{cases} x=7k \\ y=5k\end{cases} /k\in Z \Leftrightarrow 5x=7y \Leftrightarrow 10x=14y$ بالتالي: $S=\{(7k;5k)/k\in Z\}$

	$3x-2y=1 \Leftrightarrow 3x-2y=3-2 \Leftrightarrow 3(x-1)=2(y-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2k \\ y-1=3k \end{cases} / k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=2k+1 \\ y=3k+1 \end{cases} / k\in Z$ بالتالي: $S=\{(2k+1;3k+1)/ k\in Z\}$	
	باستعمال خوارزمية إقليدس نجد الحل الخاص: $(2;-3)$ منه: $17x+11y=1 \Leftrightarrow 17x+11y=2\times17-3\times11 \Leftrightarrow 17(x-2)=11(-y-3)$ $17x+11y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=11k \\ -y-3=17k \end{cases} / k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=11k+2 \\ y=-17k-3 \end{cases} / k\in Z$ بالتالي: $S=\{(11k+2;-17k-3)/ k\in Z\}$	
	باستعمال خوارزمية إقليدس نجد الحل الخاص للمعادلة $5x-3y=1$ هو $(2;3)$ منه الحل الخاص للمعادلة $5x-3y=7$ هو $(14;21)$ ، منه: $5x-3y=1 \Leftrightarrow 5x-3y=5\times14-3\times21 \Leftrightarrow 5(x-14)=3(y-21)$ $5x-3y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-14=3k \\ y-21=5k \end{cases} / k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=3k+14 \\ y=5k+21 \end{cases} / k\in Z$ بالتالي: $S=\{(3k+14;5k+21)/ k\in Z\}$	
	$10x-2y=6 \Leftrightarrow 5x-y=3 \Leftrightarrow y=5x-3$ بالتالي: $S=\{(k;5k-3)/ k\in Z\}$	
	عندما يكون أحد المعاملات 1 أو -1 فنكتفي بكتابة أحد المجهولين بدلالة الآخر.	
	لدينا : $15x+6y=11 \Rightarrow 3(5x+2y)=11 \Rightarrow 3/11$ بالتالي : $S=\phi$	
	<u>تمرين 4</u> : a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان .	
	انظر السؤال 3 أ) من التمرين السابق	1
	بوضع: $\begin{cases} d=x\wedge y \\ \Delta=x\vee y \end{cases}$ نستنتج أن: $\begin{cases} x=\alpha d \\ y=\beta d \end{cases} / \alpha\wedge\beta=1$ $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2$ و أن $d\Delta=xy$ منه: $d\Delta=\alpha\beta d^2$ منه: $\Delta=\alpha\beta d$ منه: $(x+y)\wedge(x\vee y)=(d\alpha+d\beta)\wedge\alpha\beta d=d((\alpha+\beta)\wedge\alpha\beta)$ و لكون: $\alpha\wedge\beta=1$ و حسب السؤال السابق نستنتج أن: $(\alpha+\beta)\wedge\alpha\beta=1$ بالتالي: $(x+y)\wedge(x\vee y)=d=x\wedge y$	2
	بوضع: $\begin{cases} d=x\wedge y \\ \Delta=x\vee y \end{cases}$ نستنتج أن: $\begin{cases} x=\alpha d \\ y=\beta d \end{cases} / \alpha\wedge\beta=1$ $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2$ و باستعمال النتيجة السابقة $\begin{cases} x+y=276 \\ x\vee y=1440 \\ x<y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=276\wedge1440 \\ d(\alpha+\beta)=276 \\ \alpha\beta d=1440 \\ \alpha<\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=12 \\ \alpha+\beta=23 \\ \alpha\beta=120 \\ \alpha\wedge\beta=1 \\ \alpha<\beta \end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta)\in\{(8;15)\}$: نستنتج أن منه: $(x,y)=(96;180)$ ، عكسيا نتحقق بسهولة من أن هذا الزوج يحقق النظمة المقترحة خلاصة: $S=\{(96;180)\}$	3