تمارين محلولة: التعداد والاحتمالات

1 التمرين 1.

A و B مجموعتان منتهيتان

علما أن $Card(A\cap B)+Card(A\cup B)=14$ و $Card(A\times B)=45$

حدد Card A و Card B

الحل

نعلم أن

$$Card(A\cap b)=Card\,A+Card\,B-Card(A\cup B)$$

إذن $CardA+Card\,B=Card(A\cup B)+Card(A\cap B)$

ومنه فإن $Card\,A+Card\,B=14$

وبالتالي Card A و Card B تحققان النظمة .

$$\begin{cases}Card\,A+Card\,B=14\\ Card\,A\times Card\,B=45\end{cases}$$

أي Card A و Card B هما حلا المعادلة

$$X^2-14X+45=0$$

إذن $(Card\,A=5$ و $Card\,B=9)$

أو $(Card\,A=9$ و $Card\,B=5)$

2 التمرين 2.

اكتب بدلالة n الأعداد التالية (مع تحديد الشروط)

(1 A_n^3 (2 A_{2n}^3

(3 A_{3n}^4 (4 A_{2n}^{n-1}

الحل

(1 $3\le n$

$A_n^3=n(n-1)(n-3)$

(2 $3\le 2n$ أي $n\ge 2$

$A_{2n}^3=2n(2n-1)(2n-2)$

(3 $4\le 3n$ أي $n\ge 2$

(4 $A_{3n}^4=3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)$

$0\le n-1\le 2n$ أي $n\ge 1$

$$\begin{aligned}A_{2n}^{n-1}&=2n(2n-1)(2n+2)\ldots\ldots(2n-(n-1)+1)\\&=2n(2n-1)(2n-2)\ldots\ldots(2n-n+1+1)\\&=2n(2n-1)(2n-2)\ldots\ldots(n+2)\end{aligned}$$

3 التمرين 3.

حل في IN المعادلات التالية :

(1 $A_n^2+C_n^3=7$

(2 $C_n^3-C_n^2=\dfrac{n^3-6n^2+25}{6}$

(3 $C_n^5=17C_n^4$

(4 $20.n!=(n+2)!$

الحل

1) لنحل في IN المعادلة $A_n^2+C_n^3=7$

الشروط $(2\le n$ و $3\le n)$ أي $3\le n$

$$\begin{aligned}A_n^2+C_n^3=7&\Leftrightarrow n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=7\\&\Leftrightarrow 6(n-1)n+n(n-1)(n-2)=6.7\\&\Leftrightarrow (n-1)n(n-2+6)=6.7\\&\Leftrightarrow (n-1)n(n+4)=2.3.7\\&\Leftrightarrow \boxed{n=3}\end{aligned}$$

(2 $C_n^3-C_n^2=\dfrac{n^3-6n^2+25}{6}$

الشروط : $3\le n$

$$\begin{aligned}C_n^3-C_n^2=\frac{n^3-6n^2+25}{6}&\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^3-6n^2+25}{6}\\&\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)-3n(n-1)}{6}=\frac{n^3-6n^2+25}{6}\\&\Leftrightarrow (n^3-3n^2+2n)-(3n^2-3n)=n^3-6n^2+25\\&\Leftrightarrow n^3-6n^2+5n=n^3-6n^2+25\\&\Leftrightarrow 5n=25\\&\Leftrightarrow \boxed{n=5}\end{aligned}$$

(3 $C_n^5=17C_n^4$

الشروط : $5\le n$

$$\begin{aligned}C_n^5=17C_n^4&\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-5)!\,5!}=17.\frac{n!}{(n-4)!\,4!}\\&\Leftrightarrow \frac{1}{(n-5)!\,4!\,5}=\frac{17}{(n-5)!\,(n-4).4!}\\&\Leftrightarrow \frac{1}{5}=\frac{17}{n-4}\\&\Leftrightarrow n-4=5.17\\&\Leftrightarrow \boxed{n=89}\end{aligned}$$

(4

$$\begin{aligned}20.n!=(n+2)!&\Leftrightarrow 20.n!=(n+2).(n+1).n!\\&\Leftrightarrow (n+2)(n+1)=20=5\times 4\\&\Leftrightarrow \boxed{n=3}\end{aligned}$$

4 التمرين 4.

a و b عددان حقيقيان حيث $a\neq 0$

انشر : $(a+2b)^4$, $(2a-b)^5$

$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^6$, $\left(a-\dfrac{2}{a}\right)^6$

الحل

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

$$\begin{aligned}&(a+2b)^4\\&=a^4+4a^3(2b)+6a^2(2b)^2+4a(2b)^3+(2b)^4\\&=a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2a-b)^5\\&=(2a)^5-5(2a)^5b+10(2a)^3b^2-10(2a)^2b^3+5(2a)b^4-b^5\\&=32a^5-8a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(a+\frac{1}{a}\right)^6\\&=a^6+6a^5.\frac{1}{a}+15a^4\frac{1}{a^2}+20a^3.\frac{1}{a^3}+15a^2.\frac{a}{a^4}+6.a\frac{1}{a^5}+\frac{1}{a^6}\\&=a^6+6a^4+15a^2+20+15\frac{1}{a^2}+6.\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(a-\frac{1}{a}\right)^6\\&=a^6-6a^5\left(\frac{2}{a}\right)+15a^4\left(\frac{2}{a}\right)^2-20a^3\left(\frac{2}{a}\right)^3+15a^2\left(\frac{2}{a}\right)^4-6a\left(\frac{2}{a}\right)^5+\left(\frac{2}{a}\right)^6\\&=a^6-12a^4+60a^2-160+120.\frac{1}{a^2}-192.\frac{1}{a^4}+64.\frac{1}{a^6}\end{aligned}$$

5 التمرين 5.

لدينا مائدة على الشكل U ومائدة ثانية مستديرة : وحول كل واحدة منهما خمسة كراسي غير مرقمة .

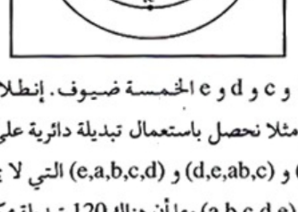
1) بكم طريقة يمكن أن نوزع الضيوف الخمسة على المائدة U؟

2) بكم طريقة يمكن أن نوزع الضيوف الخمسة على المائدة المستديرة ؟

الحل

1) عدد الطرق التي يمكن أن نوزع بها خمسة ضيوف على المائدة U كل توزيعه هي تبديلة للخمسة (الضيوف) إذن عدد هذه التبديلات هي $5!=120$ إذن هناك 120 طريقة لتوزيع الخمسة ضيوف على المائدة U.

2) عدد الطرق المختلفة لتوزيع خمسة ضيوف على مائدة مستديرة .



ليكن a و b و c و d و e الخمسة ضيوف. إنطلاقا من توزيعة ما (a,b,c,d,e) مثلا نحصل باستعمال تبديلة دائرية على (b,c,d,e,a) و(c,d,e,a,b) و (d,e,ab,c) و (e,a,b,c,d) التي لا يمكن التمييز بينها وبين التوزيعة (a,b,c,d,e) وبما أن هناك 120 تبديلة ممكنة فإن عدد الطرق لتوزيع خمسة ضيوف على مائدة مستديرة هو: $\dfrac{120}{5}=24$

ملحوظة .

نطلب من أحد الضيوف الجلوس على أحد الكراسي وبقي أربعة ضيوف يمكن توزيعها على الأربعة الكراسي الباقية بـ $4!=24$ طريقة مختلفة .

6 التمرين 6.

يحتوي صندوق على 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء .

نسحب بالتتابع وبدون احلال ثلاث كرات من الصندوق .

1) ماهو عدد السحبات الممكنة؟

2) احسب عدد السحبات المكونة من ثلاث كرات من نفس اللون .

الحل

1) نسحب بالتتابع وبدون احلال 3 كرات من الصندوق الذي يحتوي على 10 كرات يعني اختيار بدون تكرار لثلاث عناصر من بين 10 عناصر إذن عدد السحبات المختلفة الممكنة A_{10}^3 أي 720 .

2) الكرات الموجودة في الصندوق ملونة بلونين، ولكي تكون الكرات الثلاث من نفس اللون يجب اختيار ترتيبة بدون تكرار لثلاث عناصر من بين 6 عناصر (6 عدد الكرات البيضاء) أو اختيار ترتيبة بدون تكرار لثلاث عناصر من بين 4 عناصر .

إذن عدد السحبات المطلوب هو $A_4^3+A_6^3$ أي هو 144.

7 التمرين 7.

نريد وضع ثلاث كرات مرقمة من واحد الي ثلاثة داخل ثلاث خانات مرقمة من واحد الى ثلاث علما أن كل خانة يمكن أن تتسع لثلاث كرات

1) احسب عدد الامكانيات لوضع الكرات داخل الخانات .

2) احسب عدد الامكانيات لوضع الكرات داخل الخانات بحيث تبقى الخانة رقم واحد وحدها فارغة .

الحل

1) بما أن كل خانة يمكن لها أن تتسع لثلاث كرات فإن كل اختيار هو تطبيق من مجموعة الكرات نحو مجموعة الخانات إذن عدد الامكانيات المطلوب هو 3^3 أي 27 .

2) لكي تبقى الخانة رقم واحد فارغة، يكفي وضع الكرات الثلاث في الخانتين 2 و 3 (مع الخانتين غير فارغتين) . إذن عدد الامكانيات المطلوب هو (2^3-2) أي 6 .

8 التمرين 8.

ليكن $\Omega=\{1,2,3\}$ علما أن $p(\{1\})=2p(\{2\})=3p(\{3\})$

احسب $p(\{1\}),p(\{2\}),p(\{3\})$

الحل

$$\Omega=\{1,2,3\}$$

لدينا $p(\{1\})+p(\{2\})+p(\{3\})=1$

و $p(\{1\})=2p(\{2\})=3p(\{3\})$

إذن :

$$\begin{cases}p(\{1\})=2p(\{2\})=3p(\{3\})\\ p(\{1\})+p(\{2\})+p(\{3\})=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}p(\{1\})=3p(\{3\})\\ p(\{2\})=\frac{3}{2}p(\{3\})\\ 3p(\{3\})+\frac{3}{2}p(\{3\})+p(\{3\})=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}p(\{1\})=3p(\{3\})\\ p(\{2\})=\frac{3}{2}p(\{3\})\\ \frac{11}{2}p(\{3\})=1\end{cases}$$

إذن :

$$\boxed{P(\{2\})=\frac{3}{11}\quad,\quad P(\{1\})=\frac{6}{11}\quad,\quad p(\{3\})=\frac{2}{11}}$$

9 التمرين 9.

ليكن $\Omega=\{1,2,3,4\}$

احسب $p(\{1\}),p(\{2\}),p(\{3\}),p(\{4\})$ علما أن $p(\{1\}),p(\{2\}),p(\{3\}),p(\{4\})$ متناسبة مع الأعداد 1 و2 و3 و 4

الحل

$$\Omega=\{1,2,3,4\}$$

لدينا $p(\{1\})+p(\{2\})+p(\{3\})+p(\{4\})=1$

بما أن $p(\{1\})$ و $p(\{2\})$ و $p(\{3\})$ و $p(\{4\})$ متناسبة مع الأعداد 1 و 2 و 3 و 4 فإن :

$$\frac{p(\{1\})}{1}=\frac{p(\{2\})}{2}=\frac{p(\{3\})}{3}=\frac{p(\{4\})}{4}$$

ومنه فإن : $\dfrac{p(\{1\})}{1}=\dfrac{p(\{2\})}{2}=\dfrac{p(\{3\})}{3}=\dfrac{p(\{4\})}{4}$

$$=\frac{P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})}{1+2+3+4}=\frac{1}{10}$$

إذن :

$$\boxed{\begin{matrix}P(\{2\})=\frac{2}{10} & P(\{1\})=\frac{1}{10}\\ P(\{4\})=\frac{4}{10} & P(\{3\})=\frac{3}{10}\end{matrix}}$$

10 التمرين 10.

A و B حدثين بحيث $p(A)=\dfrac{3}{8}$, $p(B)=\dfrac{5}{8}$, $p(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$

أحسب $p(A\cap B)$

الحل

$p(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$; $p(B)=\dfrac{5}{8}$; $p(A)=\dfrac{3}{8}$

نعلم أن : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

إذن : $p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)$

إذن : $\boxed{p(A\cap B)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{8}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}}$

11 التمرين 11.

يحتوي كيس على بيدقتين خضراوين و 4 بيدقات حمراء مرقمة كما يلي :

- بيدقة خضراء واحدة تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم 2.
- بيدقتان حمراوان تحملان الرقم 1 و بيدقتان حمراوان تحملان الرقم 2.

نسحب في آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس مع العلم أنه لا يمكن التمييز بين جميع البيدقات باللمس .

ما هي احتمالات الاحداث التالية :

(1 A : « جميع البيدقات المسحوبة حمراء » .

(2 B : « بيدقة واحدة بالضبط خضراء » .

(3 C : « الثلاث بيدقات المسحوبة تحمل الرقم 1» .

الحل

(1 السحب عشوائي وتآني إذن $card\,\Omega=C_6^3=\dfrac{6!}{3!3!}=20$.

لدينا $card\,A=C_4^3=4$

إذن $p(A)=\dfrac{card\,A}{card\,\Omega}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$.

(2 $card\,B=C_2^1C_4^2=12$ ومنه $p(B)=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$

(3 يكون C محققاً إذا سحبنا ثلاث بيدقات في آن واحد من بين الثلاثة التي تحمل الرقم 1 :

إذن : $card\,C=C_3^3=1$. ومنه $p(C)=\dfrac{1}{20}$.

12 التمرين 12.

يحتوي كيس على 5 كرات مرقمة 1، 1، 1، 2، 3.

1) نسحب عشوائياً وتآنيا كرتين من الكيس .

a – أحسب احتمال الحصول على كرتين تحملان معاً الرقم 1.

b – أحسب احتمال الحصول على كرتين بحيث واحدة فقط تحمل الرقم 1.

2) نسحب الآن أربع كرات بالطريقة التالية : نسحب كرتين في آن واحد ولا نعيدهما إلى الكيس ثم نسحب كرتين أخريين في آن واحد

أحسب احتمال الحدث : « الكرتان الأولتان تحملان معاً الرقم 1 » .

الحل

(1 $card\,\Omega=C_5^2=10$

a – ليكن A الحدث : « الحصول على كرتين تحملان معاً الرقم 1 »

لدينا $card\,A=C_3^2=3$ إذن $p(A)=\dfrac{3}{10}$

b – ليكن B الحدث : « الحصول على كرتين، واحدة فقط تحمل الرقم 1 »

إذن $card\,B=C_3^1C_2^1=6$ ومنه $p(B)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

(2 - ليكن C الحدث : « الكرتان الأولتان تحملان معاً الرقم 1 »

$$p(C)=\frac{C_3^2C_3^2}{C_5^2.C_3^2}=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$$