

## قانون التركيب الداخلي

هي:  $\mathbb{R} - \{3\}$

4- لنبين أن:  $E = ]3; +\infty[$  جزء مستقر من  $(\mathbb{R}; *)$

نعتبر:  $y \in E$

نعتبر الدالة:  $f_y(x) = xy - 3(x + y) + 12$

معرفة على  $]3; +\infty[$

$$f'_y(x) = y - 3$$

بما أن:  $y \in E$  فإن:  $f'_y(x) > 0$  :  $\forall x \in ]3; +\infty[$

إذن:  $f_y$  تزايدية على  $]3; +\infty[$

ومنه:  $f_y(x) \geq f_y(3)$  و  $\forall x \in E$  و  $f_y(3) = 4$

إذن:  $\forall x \in E$   $f_y(x) > 3$

ومنه:  $\forall (x; y) \in E^2$   $f_y(x) > 3$

يعني:  $\forall (x; y) \in E^2$   $x * y \in E$

إذن:  $E = ]3; +\infty[$  جزء مستقر من  $(\mathbb{R}; *)$

5- لنبين أن: جميع عناصر  $\mathbb{R} - \{3\}$  منتظمة بالنسبة للقانون \*

العنصر  $a$  من  $\mathbb{R} - \{3\}$  منتظم يعني

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

بما أن \* تبادلي يكفي البرهنة أن:

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

$$a * x = a * y \Leftrightarrow ax - 3(a + x) + 12 = ay - 3(a + y) + 12$$

$$\Leftrightarrow ax - 3x = ay - 3y$$

$$\Leftrightarrow (a - 3)(x - y) = 0 ; a \neq 3$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

ومنه: جميع عناصر  $\mathbb{R} - \{3\}$  منتظمة بالنسبة للقانون \*

### تمرين 2

1- بين أن: الضرب في  $M_2(\mathbb{R})$  تجميعي

2- بين أن: الضرب في  $M_2(\mathbb{R})$  غير تبادلي

3- بين أن:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  هو العنصر المحايد في  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

4- بين أن:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  لا يقبل ماثلا في  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

5- بين أن:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  غير منتظم في  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

### الحل

2- لنبين أن: الضرب في  $M_2(\mathbb{R})$  غير تبادلي

لدينا:

### تمرين 1

نعتبر قانون التركيب الداخلي \* المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad x * y = xy - 3(x + y) + 12$$

1- بين أن: \* تجميعي و تبادلي

2- بين أن \* يقبل عنصرا محايدا ثم حدده

3- حدد عناصر  $\mathbb{R}$  التي تقبل ماثلا بالنسبة للقانون \*

4- بين أن:  $E = ]3; +\infty[$  جزء مستقر من  $(\mathbb{R}; *)$

5- بين أن: جميع عناصر  $\mathbb{R} - \{3\}$  منتظمة بالنسبة للقانون \*

### الحل

1- لنبين أن: \* تجميعي

نعتبر:  $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x * y) * z = (xy - 3(x + y) + 12)z - 3((xy - 3(x + y) + 12) + z) + 12$$

$$(x * y) * z = xyz - 3(xz + yz + xy) + 9(x + y + z) - 24$$

$$\boxed{(x * y) * z = x * (y * z)}$$

إذن:

ومنه: \* تجميعي

- لنبين أن: \* تبادلي

نعتبر:  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$x * y = xy - 3(x + y) + 12$$

لدينا:

$$= yx - 3(y + x) + 12$$

$$\boxed{x * y = y * x}$$

إذن:

2- لنبين أن \* يقبل عنصرا محايدا ثم نحدده

نعتبر:  $e \in \mathbb{R}$  بحيث:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x * e = e * x = x$$

بما أن \* تبادلي يكفي تحديد  $e$  بحيث:  $x * e = x$

$$x * e = x \Leftrightarrow xe - 3(x + e) + 12 = x$$

$$\Leftrightarrow (e - 4)(x - 3) = 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e = 4}$$

إذن: \* يقبل عنصرا محايدا و هو 4

3- عناصر  $\mathbb{R}$  التي تقبل ماثلا بالنسبة للقانون \*

نعتبر:  $x \in \mathbb{R}$

$y$  ماثلا ل  $x$  يعني:  $x * y = y * x = 4$

بما أن \* تبادلي يكفي تحديد  $y$  بحيث:  $x * y = 4$

$$x * y = 4 \Leftrightarrow xy - 3(x + y) + 12 = 4$$

$$\Leftrightarrow y(x - 3) = 3x - 9$$

$$\boxed{x * y = e \Leftrightarrow y = \frac{3x - 9}{x - 3} ; x \neq 3}$$

\* مجموعة عناصر  $\mathbb{R}$  التي تقبل ماثلا بالنسبة للقانون \*

$$-4 \text{ بين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ لا يقبل مماثلا في } (\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$$

$$-5 \text{ بين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ غير منتظم في } (\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$$

#### تمرين 4

بين أن  $f$  تشاكل في كل حالة

$$-1 \quad f : (]0; +\infty[; \times) \rightarrow (\mathbb{R}; +)$$

$$x \mapsto \ln x$$

$$-2 \quad f : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{C}^*; \times)$$

$$x \mapsto e^{ix}$$

$$-3 \quad f : (\mathcal{P}(E); \cup) \rightarrow (\mathcal{P}(E); \cap)$$

$$X \mapsto C_E^X$$

$$-4 \quad f : (\mathcal{P}(E); \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(E); \cup)$$

$$X \mapsto C_E^X$$

$$-5 \quad f : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n \text{ احسب :}$$

#### الحل

$$-1 \quad f : (]0; +\infty[; \times) \rightarrow (\mathbb{R}; +)$$

$$x \mapsto \ln x$$

$$\text{نعتبر : } (x; y) \in ]0; +\infty[^2$$

$$f(xy) = \ln(xy)$$

$$= \ln x + \ln y$$

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

إذن :  $f$  تشاكل من  $(]0; +\infty[; \times)$  نحو  $(\mathbb{R}; +)$

$$-3 \quad f : (\mathcal{P}(E); \cup) \rightarrow (\mathcal{P}(E); \cap)$$

$$X \mapsto C_E^X$$

$$\text{نعتبر : } (X; Y) \in \mathcal{P}(E)^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : الضرب في  $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  غير تبادلي

$$-3 \text{ لنبين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ هو العنصر المحايد في } (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$\text{لدينا : } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\text{و : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\text{إذن : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ هو العنصر المحايد في } (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$-4 \text{ لنبين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ لا يقبل مماثلا في } (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases} ; \begin{cases} c+d=1 \\ c+d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1=0$$

و هذا غير ممكن

$$\text{إذن : } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ لا يقبل مماثلا في } (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$-5 \text{ لنبين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ غير منتظم في } (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$\text{لدينا : } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{لكن : } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

#### تمرين 3

-1 بين أن : الضرب في  $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  تجميعي

-2 بين أن : الضرب في  $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  غير تبادلي

$$-3 \text{ بين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ هو العنصر المحايد في } (\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$$

$$f(x+y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -\cos x \sin y - \sin x \cos y \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

إذن :  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{R}; +)$  نحو  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

$$f(x+y) = f(x) \times f(y) : \text{من}$$

$$\text{نبين بالترجع أن : } f(nx) = (f(x))^n$$

$$\text{إذن : } \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

### تمرين 5

\* قانون تركيب داخلي في  $G$  بحيث :

\* تجميعي ، يقبل عنصرا محايدا  $e$  ، جميع عناصر  $G$  تقبل مماثلا في  $(G; *)$  (مماثل  $a$  هو  $a^{-1}$ )

$$f : G \rightarrow \mathcal{F}$$

نعتبر التطبيق :

$$a \mapsto f_a$$

$$f_a : G \rightarrow G$$

$f_a$  معرف بما يلي :

$$x \mapsto a * x * a^{-1}$$

$$-1 \text{ بين أن : } \forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b}$$

$$-2 \text{ نعتبر : } F = \{f_a / a \in G\}$$

أ - بين أن :  $\circ$  قانون تركيب داخلي في  $F$  تجميعي ، يقبل

عنصرا محايدا ، جميع عناصر  $F$  تقبل مماثلا في  $(F; \circ)$

ب- بين أن :  $f$  تشاكل من  $(G; *)$  نحو  $(F; \circ)$

### الحل

$$-1 \text{ لنبين أن : } \forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b}$$

نعتبر :  $x \in G$

$$f_a \circ f_b(x) = a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1}$$

$$\text{بما أن : } * \text{ تجميعي و } (a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

$$\text{فإن : } a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1} = (a*b) * x * (a*b)^{-1}$$

$$\text{إذن : } \forall x \in G \quad f_a \circ f_b(x) = f_{a*b}(x)$$

$$\text{و منه : } \boxed{\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b}}$$

$$-2 \text{ نعتبر : } F = \{f_a / a \in G\}$$

أ - لنبين أن :  $\circ$  قانون تركيب داخلي في  $F$

$$\text{من -1 : } \forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b}$$

وبما أن : \* قانون تركيب داخلي في  $G$

$$f(X \cup Y) = C_E^{X \cup Y}$$

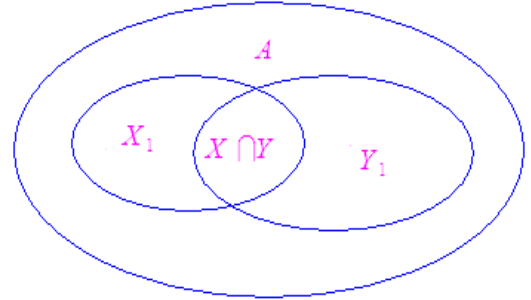
$$= E - (X \cup Y)$$

$$= (E - X) \cap (E - Y)$$

$$= C_E^X \cap C_E^Y$$

$$f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y)$$

إذن :  $f$  تشاكل من  $(\mathcal{P}(E); \cup)$  نحو  $(\mathcal{P}(E); \cap)$



$$E - (X \cup Y) = A$$

$$E - X = A \cup Y_1$$

$$E - Y = A \cup X_1$$

$$(A \cup Y_1) \cap (A \cup X_1) = A$$

$$\text{إذن : } \boxed{E - (X \cup Y) = (E - X) \cap (E - Y)}$$

$$-4 \quad f : (\mathcal{P}(E); \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(E); \cup)$$

$$X \mapsto C_E^X$$

نعتبر :  $(X; Y) \in \mathcal{P}(E)^2$

$$f(X \cap Y) = C_E^{X \cap Y}$$

$$= E - (X \cap Y)$$

$$= (E - X) \cup (E - Y)$$

$$= C_E^X \cup C_E^Y$$

$$f(X \cap Y) = f(X) \cup f(Y)$$

إذن :  $f$  تشاكل من  $(\mathcal{P}(E); \cap)$  نحو  $(\mathcal{P}(E); \cup)$

$$f : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (M_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$-5 \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

نعتبر :  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

3- استنتاج خاصيات  $(E; \times)$

**الحل**

1- لنبين أن  $f$  تقابل

$$\text{نعتبر: } \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = f \left( \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow a+ib = c+id$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = f \left( \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

إذن  $f$  تبين (a)

نعتبر:  $c+id \in \mathbb{C}^*$

$$\text{لنحدد: } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in E \text{ بحيث: } c+id = f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right)$$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c+id \Leftrightarrow a+ib = c+id$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c+id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

إذن  $f$  شمولي (b)

من (a) و (b) :  $f$  تقابل

2- بين أن  $f$  تشاكل من  $(E; \times)$  نحو  $(\mathbb{C}^*; \times)$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = f \left( \begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix} \right)$$

$$= (ac-bd) + i(bc+ad)$$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = (a+bi)(c+di)$$

إذن  $f$  تشاكل من  $(E; \times)$  نحو  $(\mathbb{C}^*; \times)$

3- استنتاج خاصيات  $(E; \times)$

بما أن  $f$  تشاكل تقابلي من  $(E; \times)$  نحو  $(\mathbb{C}^*; \times)$

فإن  $f^{-1}$  تشاكل  $(\mathbb{C}^*; \times)$  من نحو  $(E; \times)$

و بما أن  $\times$  قانون تركيب داخلي في  $\mathbb{C}^*$

$\times$  تجميعي تبادلي، يقبل عنصرا محايدا 1، جميع عناصر  $\mathbb{C}^*$

تقبل مماثلا في  $(\mathbb{C}^*; \times)$

فإن:  $a*b \in G$

إذن:  $f_{a*b} \in F$

ومنه:  $f_a \circ f_b \in F$

إذن:  $\circ$  قانون تركيب داخلي في  $F$

– لنبين أن:  $\circ$  تجميعي

نعتبر:  $(a;b;c) \in G^3$

بما أن:  $*$  قانون تركيب داخلي في  $G$

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

$$(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_{a*b} \circ f_c$$

$$= f_{(a*b)*c}$$

$$= f_{a*(b*c)}$$

$$= f_a \circ f_{(b*c)}$$

$$(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_a \circ (f_b \circ f_c)$$

إذن:  $\circ$  تجميعي في  $F$

– لنبين أن:  $\circ$  يقبل عنصرا محايدا

نعتبر:  $a \in G$

لدينا:  $f_e \circ f_a = f_{e*a} = f_a$  و  $f_a \circ f_e = f_{a*e} = f_a$

إذن:  $\circ$  يقبل عنصرا محايدا و هو  $f_e$

– لنبين أن: جميع عناصر  $F$  تقبل مماثلا في  $(F; \circ)$

نعتبر:  $a \in G$  و  $a^{-1} \in G$  مماثل  $a$

لدينا:  $f_{a^{-1}} \circ f_a = f_{a^{-1}*a} = f_e$  و  $f_a \circ f_{a^{-1}} = f_{a*a^{-1}} = f_e$

إذن: مماثل  $f_a$  هو  $f_{a^{-1}}$

ومنه: جميع عناصر  $F$  تقبل مماثلا في  $(F; \circ)$

ب- بين أن:  $f$  تشاكل من  $(G; *)$  نحو  $(F; \circ)$

نعتبر:  $(a;b) \in G^2$

لدينا:  $f(a*b) = f_{a*b}$

إذن:  $f(a*b) = f_a \circ f_b$

إذن:  $f$  تشاكل من  $(G; *)$  نحو  $(F; \circ)$

**تمرين 6**

نعتبر:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2; (a;b) \neq (0;0) \right\}$$

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a+ib$$

نعتبر التطبيق:

1- بين أن:  $f$  تقابل

2- بين أن:  $f$  تشاكل من  $(E; \times)$  نحو  $(\mathbb{C}^*; \times)$

(مماثل  $a+ib$  هو  $\frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$ )

فإن  $\times$  قانون تركيب داخلي في  $E$

$\times$  تجميعي تبادلي ، يقبل عنصرا محايدا  $f^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ،

جميع عناصر  $E$  تقبل مماثلا في  $(E; \times)$

(مماثل  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  هو  $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ )