

الهندسة الفضائية

2 عت

الفلكة : 7.

تعريف : a.

لتكن Ω نقطة و r عددا حقيقيا موجبا قطعاً.
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M = r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها r ونرمزها بالرمز : $S(\Omega, r)$.
ولدينا : $M \in S \Leftrightarrow \Omega M = r$

b. معادلة ديكارتية لفلكة لمعرفة مركز شعاع :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a, b, c)$ وشعاعها r هي
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

c. معادلة ديكارتية لفلكة لمعرفة بأحد أقطارها :

لتكن S فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة في الفضاء .
 $M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$
 $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$

d. دراسة مجموعة النقط التي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

باستعمال المتساوية $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ نجد أن :

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$
تكافئ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \alpha$

مع $\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$

نفضل بين 3 حالات :

إذا كان $\alpha < 0$ فإن E مجموعة فارغة .

إذا كان $\alpha = 0$ فإن E هي الأحادية $\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)\right\}$.

إذا كان $\alpha > 0$ فإن E فلكة مركزه $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ وشعاعها $\sqrt{\alpha}$.

e. الوضع النسبي لفلكة ومستقيم :

لتكن $S(\Omega, r)$ فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (D) مستقيماً في الفضاء
ليكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (D)
نضع : $d = d(\Omega, (D))$

إذا كان $d > r$ فإن الفلكة والمستقيم لا يتقاطعان

نقول إن المستقيم (D) خارج الفلكة $S(\Omega, r)$

إذا كان $d = r$ فإن المستقيم مماس للفلكة في النقطة H ، يتم تحديد

مثلث إحداثياتها محل نظمة مكونة من تمثيل بارامترى للمستقيم (D) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

نعتبر الفضاء منسوباً إلى M, m, m, m $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. الجداء السلمي للمتجهتين :

a. الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

إذا كان $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$
فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

نتيجة : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

b. منظم متجهة :

منظم متجهة $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ هو العدد الحقيقي الموجب :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

c. المسافة بين نقطتين :

المسافة بين نقطتين A و B هي :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

d. متجهة منظمية على مستوى :

نسمى متجهة منظمية على مستوى P ، كل متجهة غير منعدمة اتجاهها عمودي على المستوى P .

نتيجة :

متجهة منظمية على مستوى معرف بمعادلة $ax + by + cz + d = 0$
هي $\vec{n}(a, b, c)$.

ملاحظة :

كل مستقيم عمودي على مستوى يكون موجهاً بمنظمية على هذا المستوى .
تمثيل بارامترى للمستقيم المار من نقطة Ω والعمودي على المستوى P
المعرف بالمعادلة $ax + by + cz + d = 0$ هو :

$$\begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

e. تحديد معادلة ديكارتية لمستوى مار بنقطة و متجهة منظمية عليه :

لتكن A نقطة و \vec{n} متجهة غير منعدمة .
يوجد مستوى وحيد P مار من A و \vec{n} منظمية عليه ولدينا :

$$M \in P \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

f. تحديد مثلث إحداثيات المسقط العمودي لنقطة على مستوى :

مسقط نقطة Ω على مستوى P هو نقطة تقاطع P مع المستقيم (Δ)
المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى P . ويتم تحديد مثلث
إحداثياتها محل نظمة مكونة من تمثيل بارامترى للمستقيم (Δ) ومعادلة
ديكارتية للمستوى .

الهندسة الفضائية

2 ع ت

ملاحظة :

كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجهًا بالمتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

d. مساحة مثلث:

$$S_{ABC} = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2} \quad \text{مساحة مثلث } ABC \text{ هي:}$$

e. مساحة متوازي الأضلاع:

$$S_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \quad \text{مساحة متوازي الأضلاع } ABCD \text{ هي:}$$

d. مسافة نقطة عن مستقيم:

مسافة نقطة Ω عن مستقيم (D) مار من نقطة A و موجه بمتجهة \vec{u} هي

$$d(\Omega; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

e. توازي وتعامد مستويين:

نعتبر مستويين $(P): ax+by+cz+d=0$

$$(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$$

المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P) المتجهة $\vec{n}'(a',b',c')$ منظمية على (P') $(P) \parallel (P')$. يكافئ $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$ (جداً متجهي) $(P) \perp (P')$. يكافئ $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ (جداً سلمي)

f. تقاطع مستويين:

نعتبر مستويين متقاطعين (P) و (P') .لتكن \vec{n} متجهة منظمية على (P) و \vec{n}' متجهة منظمية على (P') تقاطع المستويين (P) و (P') هو مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ . إذا كان $d < r$ فإنه يكون للفلكة والمستقيم نقطتان مشتركتان، يتم

تحديد مثلثي إحداثياتهما بجل نظمة مكونة من تمثيل بارامتري

للمستقيم (D) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

نقول إن المستقيم يخترق الفلكة

f. الوضع النسبي لفلكة ومستوى:

لتكن $S(\Omega, r)$ فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (P) مستوى من الفضاءمعرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$.ليكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P) .

$$\text{نضع: } d = (\Omega, (P)) = \frac{|ax_{\Omega} + by_{\Omega} + cz_{\Omega} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

. إذا كان $d > r$ فإنه لا توجد نقطة مشتركة بين $S(\Omega, r)$ و (P) .إذا كان $d = r$ فإن (P) و $S(\Omega, r)$ نقطة وحيدة مشتركة وهي H نقول إن المستوى (P) تماس للفلكة $S(\Omega, r)$ في H . إذا كان $d < r$ فإن تقاطع $S(\Omega, r)$ و (P) هو الدائرة التي مركزها

$$H \text{ وشعاعها } r' = \sqrt{r^2 - d^2}$$

ملحوظة 1: إذا كان $d = 0$ أي $\Omega \in (P)$ فإن (P) يقطع $S(\Omega, r)$ وفق دائرة كبرى مركزها Ω وشعاعها r .ملحوظة 2: يتم تحديد مثلث إحداثيات النقطة H بجل نظمة مكونة من معادلةديكارتية للمستوى و تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) ، المار من Ω والعمودي

على المستوى .

g. الجداء المتجهي:

a. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي:

إذا كان $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

b. استقامية متجهتين:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad \text{يكافئ } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}$$

c. استقامية ثلاث نقط:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0} \quad \text{A و B و C مستقيمة يكافئ}$$

نتيجة: منظمية على مستوى (ABC) لتكن A و B و C نقطا غير مستقيمة .المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$$

الذي نستنتج منه معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .