# الاشتقاق

ذ. محمد الكيال

## قابلية الاشتقاق في عدد:

نقول إن دالة $f$ قابلة للاشتقاق في العدد $x_0$ إذا كانت النهاية : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة $f$ في $x_0$ ويرمز له بالرمز : $f'(x_0)$

## معادل المماس لمنحنى دالة - الدالة التألفية المماسة لمنحنى دالة:

لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق في $x_0$

- معادلة المماس لمنحنى الدالة $f$ في النقطة التي أفصولها $x_0$ هي : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- الدالة $u$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $u(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تسمى الدالة التآلفية المماسة لمنحنى الدالة $f$ في النقطة التي أفصولها $x_0$ و هي تقريب للدالة $f$ بجوار $x_0$

## قابلية الاشتقاق على اليمين - قابلية الاشتقاق على اليمين :

- نقول إن دالة $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين في $x_0$ إذا كانت النهاية $\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة $f$ على اليمين في $x_0$ و يرمز له بالرمز : $f'_d(x_0)$

- نقول إن دالة $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0$ إذا كانت النهاية : $\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة $f$ على اليسار في $x_0$ و يرمز له بالرمز : $f'_g(x_0)$

تكون دالة $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في $x_0$ و $f'_g(x_0)=f'_d(x_0)$

## الاشتقاق و الاتصال:

إذا كانت دالة $f$ قابلة للاشتقاق في عدد $x_0$ فإن $f$ تكون متصلة في $x_0$

## جدول مشتقات بعض الدوال الاعتيادية:

| | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| $(k\in\mathbb{R})$ | $k$ | $0$ |
| | $x$ | $1$ |
| | $\frac{1}{x}$ | $\frac{-1}{x^2}$ |
| $(r\in\mathbb{Q}^*-\{1\})$ | $x^r$ | $rx^{r-1}$ |
| | $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| | $\sin x$ | $\cos x$ |
| | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| | $\tan x$ | $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ |

## العمليات على الدوال المشتقة- مشتقة مركب دالتين - مشتقة دالة الجذر:

| | | |
|---|---|---|
| $(u+v)' = u' + v'$ | $(u-v)' = u' - v'$ | $(ku)' = k(u)' \quad (k \in \mathbb{R})$ |
| $(uv)' = u'v + uv'$ | $\left(u^n\right)' = nu'.u^{n-1}$ | |
| $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ | |
| $(u \circ v)' = \left[u' \circ v\right] \times v'$ | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | |

## الاشتقاق و تغيرات دالة:

لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$

- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f$ تزايدية على المجال $I$
- $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f$ تناقصية على المجال $I$
- $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f$ ثابتة على المجال $I$

## الاشتقاق و التأويل الهندسي:

| النهاية | استنتاج | التأويل الهندسي للمنحنى $(C_f)$ يقبل : |
|---|---|---|
| $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$ | $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ | مماسا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو $a$ |
| $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ | | مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ |
| $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$ | $f$ قابلة للاشتقاق على يمين $x_0$ | نصف مماس على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو $a$ |
| $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ | | نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ |
| $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ | $f$ غير قابلة للاشتقاق على يمين $x_0$ | نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل |
| $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ | | نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى |
| $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$ | $f$ قابلة للاشتقاق على يسار $x_0$ | نصف مماس على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو $a$ |
| $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ | | نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ |
| $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ | $f$ غير قابلة للاشتقاق على يسار $x_0$ | نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى |
| $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ | | نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل |