

اتصال دالة عددية

1) اتصال دالة في نقطة :

أ. تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0

نقول أن f متصلة في x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$f \text{ متصلة في } x_0 \text{ تعني } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f) : 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a \text{ على اليمين} \quad \checkmark$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a \text{ على اليسار} \quad \checkmark$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a \quad \checkmark$$

ب. التمديد بالاتصال في نقطة :

لتكن f دالة عددية بحيث $x_0 \notin D_f$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$)

$$\text{الدالة } \tilde{f} \text{ بحيث : } \begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) = l \end{cases}$$

الدالة \tilde{f} تسمى التمديد بالاتصال للدالة f في x_0

2) الاتصال على مجال :

أ. تعريف :

- f متصلة على مجال $]a, b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a, b[$
- f متصلة على مجال $[a, b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $[a, b[$ و متصلة على يسار b

- f متصلة على مجال $]a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a
- f متصلة على مجال $]a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يسار b

ب. العمليات على الدوال المتصلة :

- ❖ الدوال الحدودية متصلة على \mathbb{R}
- ❖ الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- ❖ الدوال المثلثية \sin و \cos متصلتان على \mathbb{R}
- ❖ دالة \tan متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- ❖ دالة الجزء الصحيح متصلة على كل مجال $[n, n+1[$ ($n \in \mathbb{Z}$)
- ❖ إذا كانت f و g متصلتان على مجال I فإن $f + g$ و $f \times g$ متصلتان على I
- ❖ إذا كانت f و g متصلتان على مجال I و $g \neq 0$ على I فإن $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتان على I .
- ❖ إذا كانت f متصلة على مجال I و $f \geq 0$ على I فإن \sqrt{f} متصلة على I .

خاصية :

1. إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على J بحيث $f(I) \subset J$ فإن $g \circ f$ متصلة على I
2. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ و g متصلة في l فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g(l)$

3) صورة مجال بدالة متصلة:

خاصية :

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هو مجال

4) صورة مجال بدالة متصلة ورتبية قطعا :

$f(I)$	المجال I	
$[f(a), f(b)]$	$[a, b]$	تزايدية قطعا f
$\left[f(a), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$[a, b[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), f(b) \right]$	$]a, b]$	
$\left[\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$]a, b[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a) \right]$	$] -\infty, a]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \right[$	$] -\infty, a[$	
$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$[b, +\infty[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$	$]b, +\infty]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, +\infty[$	
$[f(b), f(a)]$	$[a, b]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), f(a) \right]$	$]a, b]$	
$\left[f(b), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$	$[a, b[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right]$	$]a, b]$	
$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, a]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$	$] -\infty, a[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(b) \right]$	$[b, +\infty]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x) \right]$	$]b, +\infty]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, +\infty[$	

(5) ميرهنة القيم الوسيطة :

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ فإنه لكل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل c من $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \lambda$

نتائج :

▪ ميرهنة القيم الوسيطة (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$

▪ ميرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a,b[$

▪ ميرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على I و $0 \in f(I)$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

(6) الدالة العكسية :

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال $J = f(I)$ نحو I أو نقول أن f تقابل من I نحو J وتقابله العكسي f^{-1}

نتائج :

$$(1) \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & ; x \in I \\ f \circ f^{-1}(x) = x & ; x \in J \end{cases}$$

خاصيات:

لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :
✚ f^{-1} متصلة على المجال J
✚ f و f^{-1} لهما نفس الرتبة
✚ منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (المنصف الأول للمعلم)

