

## الأعداد العقدية

### مبرهنة

توجد مجموعة  $\mathbb{C}$  تتضمن  $\mathbb{R}$  و تحقق:

(i) يحتوي  $\mathbb{C}$  على عنصر غير حقيقي  $i$  و يحقق  $i^2 = -1$

(ii) كل عنصر من  $\mathbb{C}$  يكتب بكيفية و حيدة على الشكل:  $a+ib$  بحيث  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

(iii) المجموعة  $\mathbb{C}$  مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في  $\mathbb{R}$  و لهما نفس الخاصيات

**خاصية** ليكن  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$  و  $(a';b') \in \mathbb{R}^2$   $a = a'$  و  $b = b'$   $\Leftrightarrow a+ib = a'+ib'$

ليكن عدد عقدي  $z = a+ib$  حيث  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$   
العدد  $a$  يسمى الجزء الحقيقي نكتب  $\text{Re}(z) = a$ ، و العدد  $b$  يسمى الجزء التخيلي نكتب  $\text{Im}(z) = b$

**خاصية**  $(\mathbb{C}; +; \times)$  جسم تبادلي

### 1- التمثيل الهندسي لعدد عقدي

المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ .

كل نقطة  $M (a;b) \in (P)$  هي صورة عدد عقدي وحيد  $z = a+ib$  وهذا الأخير يسمى لحق  $M$  ونكتب  $M(z)$

أو  $z = \text{aff}(M)$

العدد العقدي  $z = a+ib$  حيث  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$  يسمى أيضا لحق المتجهة  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$  نكتب  $z = \text{aff}(\vec{u})$

\* لحق  $\overrightarrow{AB}$  هو  $z_B - z_A$  حيث  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$

\* تكون النقط المختلفة  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$  و  $C(z_C)$  مستقيمية إذا و فقط إذا كان  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

\* التطبيق  $M(z) \rightarrow M'(z+a)$  من المستوى  $(P)$  نحو المستوى  $(P)$  هو الازاحة التي متجهتها

$\vec{u}$  حيث  $\text{aff}(\vec{u}) = a$

### 2- المرافق و المعيار

ليكن عدد عقدي  $z = a+ib$  حيث  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ .

\* العدد العقدي  $z = a - ib$  يسمى مرافق العدد العقدي  $z = a + ib$  ونرمز له بـ  $\bar{z} = a - ib$ .

\* العدد الحقيقي  $\sqrt{z\bar{z}}$  يسمى معيار العدد العقدي  $z = a + ib$ . نرمز له بـ  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

لتكن  $(z; z') \in \mathbb{C}^2$  و  $\alpha \in \mathbb{R}$  و  $n \in \mathbb{Z}^*$

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \quad ; \quad z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)i \quad *$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, \quad z' \neq 0 \quad \overline{\alpha z} = \alpha \bar{z} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}' \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad *$$

$$m \in \mathbb{N}^* \quad \left| \sum_{i=1}^{i=m} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{i=m} |z_i| \quad *$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z \quad *$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z \quad *$$

$$z' \neq 0 \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad |z^n| = |z|^n \quad |z \cdot z'| = |z| |z'| \quad *$$

$$\| \overline{AB} \| = AB = |z_B - z_A| \quad *$$

### 3- الشكل المثلثي لعدد عقدي والعمدة

المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

ليكن  $z = a + ib$  حيث  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  عددا عقديا غير منعدم و النقطة  $M$  صورته  $\alpha$  قياسا

للزاوية  $(\vec{e}_1, \overline{OM})$ .

العدد  $\alpha$  يسمى عمدة للعدد العقدي  $z$  و نكتب  $[2\pi]$   $\arg z \equiv \alpha$ .

\*- ليكن  $z = a + ib$  حيث  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  عددا عقديا غير منعدم و  $r$  عددا حقيقيا موجبا قطعاً و  $\alpha$

عددا حقيقيا نضع  $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

ومنه  $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$  حيث  $\cos\alpha = \frac{a}{r}$  ;  $\sin\alpha = \frac{b}{r}$  إذن  $[2\pi]$   $\arg z \equiv \alpha$

الكتابة  $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$  تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي  $z$  و نكتب  $z=[r,\alpha]$

### خاصات

$$z=[r,\alpha] \text{ و } z'=[r',\alpha'] \text{ فان } zz'=[rr',\alpha+\alpha'] \text{ و } \frac{z}{z'}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$$

$$-z=[r,\alpha+\pi] \text{ و } \bar{z}=[r,-\alpha]$$

$$\frac{1}{z}=\left[\frac{1}{r},-\alpha\right] \text{ و } z^n=[r^n;n\alpha]$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha \quad \text{صيغة موافر}$$

إذا كان  $A(z_A) \neq B(z_B)$  و  $D(z_D) \neq C(z_C)$  فان  $[2\pi] \arg(z_B - z_A) = \overline{(\vec{e}_1; \overline{AB})}$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \overline{(\overline{AB}; \overline{AC})} \quad [2\pi] \text{ و}$$

### 4- الكتابة الاسية

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad z = [r, \alpha] = re^{i\alpha}$$

### 5- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم

الجذور النونية  $a = [r, \alpha]$  (جذور المعادلة  $z^n = a$  حيث  $n \in \mathbb{N}^*$ ) هي

$$k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\} \quad z_k = \left[ \sqrt[n]{r}; \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right]$$

الجذور النونية للوحدة أي الجذور النونية لـ 1 هي  $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\} \quad z_k = \left[ 1; \frac{2k\pi}{n} \right]$

### 6- المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  أعدادا عقدية بحيث  $a$  غير منعدم .

المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  تقبل حلين في  $\mathbb{C}$  هما  $z_1 = \frac{-b+d}{2a}$  ;  $z_2 = \frac{-b-d}{2a}$  حيث  $d$  جذر

مربع للمميز  $b^2 - 4ac$  .