البنيات الجبرية

1) قانون التركيب الداخلي:

قانون تركيب داخلي

لتكن E مجموعة
كل تطبيق f من $E\times E$ نحو E يسمى قانون تركيب داخلي في E

$$\begin{array}{rccc} f: & E\times E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

غالبا ما نرمز ل $f(x,y)$ ب : $x*y$ أو $x\mathrm{T}y$ أو $x\perp y$
ونقول إن المجموعة E مزودة بقانون التركيب الداخلي $*$ و نكتب $(E,*)$

جزء مستقر

لتكن E مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ و ليكن S جزءا من E
نقول إن S جزء مستقر من $(E,*)$ إذا كان : $x*y\in S \quad \left(\forall(x,y)\in S^2\right)$

خاصيات قوانين التركيب الداخلية

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E
- ❖ $*$ تجميعي في $E \Leftrightarrow x*(y*z)=(x*y)*z \quad \left(\forall(x,y,z)\in E^3\right)$
- ❖ $*$ تبادلي في $E \Leftrightarrow x*y=y*x \quad \left(\forall(x,y)\in E^2\right)$

العنصر المحايد

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E و $e\in E$
- ✓ e عنصر محايد في E بالنسبة للقانون $* \Leftrightarrow x*e=x$ و $e*x=x \quad (\forall x\in E)$
- ✓ إذا كان للقانون $*$ عنصرا محايدا فإنه وحيد

العنصر المماثل

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E بحيث $*$ يقبل عنصرا محايدا e و ليكن $x\in E$
- ✓ x يقبل مماثلا في بالنسبة للقانون $*$ إذا وفقط إذا وجد عنصر x' من E بحيث : $x*x'=x'*x=e$
- ✓ بالإضافة إذا كان القانون $*$ تجميعي فإن x' وحيد
- ✓ بالإضافة إذا كان القانون $*$ تجميعي و كان x' ماثل x و y' مماثل y فإن $(x*y)'=y'*x'$

العنصر المنتظم

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E . نقول إن عنصرا a من E منتظم إذا وفقط إذا كان :

$$\left(\forall (x,y)\in E^2\right) \quad \begin{cases} a*x=a*y \Rightarrow x=y \\ x*a=y*a \Rightarrow x=y \end{cases}$$

2) التشاكل:

- **ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E و $\top$ قانون تركيب داخلي في F**
  نسمي تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ كل تطبيق $f:E\to F$ يحقق :
  $$\left(\forall (x,y)\in E^2\right) \quad f(x*y)=f(x)\top f(y)$$
- **إذا كان f تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ فإن $f(E)$ جزء مستقر من $(F,\top)$**
- **إذا كان f تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ و $*$ تجميعي في E فإن $\top$ تجميعي في $f(E)$**
- **إذا كان f تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ و $*$ تبادلي في E فإن $\top$ تبادلي في $f(E)$**
- **إذا كان e عنصر محايد في $(E,*)$ فإن $f(e)$ عنصر محايد في $(f(E),\top)$**
- **إذا كان x' مماثل x في $(E,*)$ فإن $(f(x))'=f(x')$ هو مماثل $f(x)$ في $(f(E),\top)$**

3) الزمرة :

لتكن G مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$
نقول إن $(G,*)$ زمرة إذا وفقط إذا كان :

- **$*$ تجميعي في G**
- **$*$ يقبل عنصرا محايدا**
- **كل عنصر من G يقبل مماثلا**

بالإضافة إذا كان القانون $*$ تبادلي فإننا نقول أن $(G,*)$ زمرة تبادلية

- **لتكن $(G,*)$ زمرة**
  - **كل عنصر a من G منتظم**
  - **ليكن a و b من G : كل من المعادلتين $a*x=b$ و $x*a=b$ تقبل حلا وحيدا في G**

زمرة جزئية

لتكن $(G,*)$ زمرة و H جزء مستقر من $(G,*)$

- **$(H,*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$ إذا وفقط إذا كان $(H,*)$ زمرة**

لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد e و لتكن H زمرة جزئية ل $(G,*)$ ، لدينا :

- $H \neq \varnothing$
- e **هو العنصر المحايد في** H
- **إذا كان** $x \in H$ **و** x' **مماثل** x **في** G **فإن** $x' \in H$
- $x * y' \in H \quad \left(\forall (x,y) \in H^2\right)$ حيث y' **مماثل** y **في** G

لتكن $(G,*)$ زمرة و H جزء من G . تكون H زمرة جزئية ل $(G,*)$ إذا وفقط إذا كان :

- $H \neq \varnothing$
- $x * y' \in H \quad \left(\forall (x,y) \in H^2\right)$ حيث y' **مماثل** y **في** G

تشاكل الزمر

لتكن $(G,*)$ زمرة و لتكن E مزودة بقانون تركيب داخلي T و $f : (G,*) \to (E,\mathrm{T})$ تشاكل لدينا ما يلي :

- $\left(f(G),\mathrm{T}\right)$ **زمرة**
- **إذا كانت** $(G,*)$ **زمرة تبادلية فإن** $\left(f(G),\mathrm{T}\right)$ **زمرة تبادلية**
- **إذا كان** f **تشاكل شمولي ، فإن** $f(G) = E$ و منه (E,T) زمرة.

4) الحلقة :

توزيعية قانون بالنسبة لآخر

لتكن E مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T
نقول أن T توزيعي بالنسبة ل $*$ إذا وفقط إذا كان :

- $x\mathrm{T}(y * z) = (x\mathrm{T}y) * (x\mathrm{T}z) \quad \left(\forall (x,y,z) \in E^3\right)$
- $(x * y)\mathrm{T}z = (x\mathrm{T}z) * (y\mathrm{T}z) \quad \left(\forall (x,y,z) \in E^3\right)$

الحلقة

لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T
نقول أن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة إذا وفقط إذا كان :

- $(A,*)$ **زمرة تبادلية**
- T **تجميعي**
- T **توزيعي بالنسبة ل** $*$

✓ **بالإضافة إذا كان القانون T تبادلي نقول إن الحلقة A تبادلية**
✓ **بالإضافة إذا كان للقانون T عنصر محايد ، نقول إن الحلقة A واحدية.**

- لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة صفرها e ، لدينا : $a\mathrm{T}e=e\mathrm{T}a=e \quad (\forall a\in A)$
- لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة صفرها e و نرمز ب a' مماثل a في $(A,*)$، لدينا :

$$(\forall (a,b)\in A^2) \quad a\mathrm{T}b'=a'\mathrm{T}b=(a\mathrm{T}b)'$$

العناصر القابلة للماثلة

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة حلقة واحدية وحدتها ε
نقول إن عنصرا a من A قابلا للماثلة أو يقبل مقلوبا إذا كان له مماثلا بالنسبة للقانون T في A

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة حلقة واحدية وحدتها ε و لتكن U مجموعة العناصر لقابلة للماثلة ، لدينا : (U,T) زمرة

قواسم الصفر في حلقة

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة صفرها 0_A
نقول إن عنصرا a من A قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان : $a\neq 0_A$ و يوجد $b\neq 0_A$ بحيث : $a\mathrm{T}b=0_A$

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة
نقول إن الحلقة $(A,*,\mathrm{T})$ كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر

5) الجسم :

لتكن K مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T
نقول إن $(K,*,\mathrm{T})$ جسم إذا وفقط إذا كان :

- $(K,*,\mathrm{T})$ حلقة واحدية
- كل عنصر يخالف صفر الحلقة يقبل مماثلا بالنسبة ل T

ليكن $(K,+,\times)$ جسما
لدينا كل عنصر من $K-\{0_A\}$ منتظم بالنسبة للضرب . يعني :

$$(\forall a\in K-\{0_A\})(\forall (x,y)\in K^2):\begin{cases} a.x=a.y\Rightarrow x=y \\ x.a=y.a\Rightarrow x=y\end{cases}$$

ليكن $(K,+,\times)$ جسما. لدينا :

$$(\forall (x,y)\in K^2): x.y=0_K \Rightarrow x=0_K \text{ أو } y=0_K$$

- كل جسم هو حلقة كاملة

ليكن $(K,+,\times)$ جسما . نعتبر المعادلة $a\times x=b$

- إذا كان $a\neq 0_K$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا $x=a^{-1}b$
- إذا كان $a=0_K$ و $b\neq 0_K$ فإن المعادلة ليس لها حلا
- إذا كان $a=0_K$ و $b=0_K$ فإن $S=K$

6) الفضاءات المتجهية الحقيقية :

قانون تركيب خارجي

لتكن A و E مجموعتين غير فارغتين

f قانون تركيب خارجي معرف على E ذو المعاملات في A $\Leftrightarrow$ $$f:\begin{array}{ccc} A\times E & \to & E \\ (\alpha,x) & \mapsto & f(\alpha,x)\end{array}$$

عادة ما نرمز ل $f(\alpha,x)$ ب $\alpha.x$ أو αx

الفضاء المتجهي

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ و بقانون تركيب خارجي • معاملاته في $\mathbb{R}$

نقول أن $(E,*,.)$ فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا كان :

1. $(E,*)$ زمرة تبادلية
2. $(\alpha+\beta).x=\alpha x+\beta x \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in E$
3. $(\alpha\beta).x=\alpha.(\beta x) \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in E$
4. $\alpha.(x*y)=\alpha.x*\alpha.y \quad \forall\alpha\in\mathbb{R},\forall(x,y)\in E^2$
5. $1.x=x \quad \forall x\in E$

ترميز : سنرمز ل $*$ ب $+$ و لكل عنصر x من E بالرمز $\vec{x}$ و نسميه متجهة

$(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا كان :

1. $(E,+)$ زمرة تبادلية
2. $(\alpha+\beta).\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x} \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall\vec{x}\in E$
3. $(\alpha\beta).\vec{x}=\alpha.(\beta\vec{x}) \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall\vec{x}\in E$
4. $\alpha.(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha.\vec{y} \quad \forall\alpha\in\mathbb{R},\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2$
5. $1.\vec{x}=\vec{x} \quad \forall\vec{x}\in E$

قواعد الحساب في فضاء متجهي

ليكن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

1. $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$
2. $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \vec{x} \in E) \quad \alpha\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha=0$ أو $\vec{x}=\vec{0}$
3. $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \vec{x} \in E) \quad (-\alpha)\vec{x}=\alpha.(-\vec{x})=-(\alpha\vec{x})$
4. $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2) \quad \alpha.(\vec{x}-\vec{y})=\alpha\vec{x}-\alpha\vec{y}$
5. $(\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall \vec{x} \in E^2) \quad (\alpha-\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}-\beta\vec{x}$

الفضاء المتجهي الجزئي

ليكن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير فارغ من E
نقول أن F فضاء متجهي جزئي من الفضاء E إذا وفقط إذا كان :

1. $(\forall (\vec{x},\vec{y}) \in F^2) \quad \vec{x}+\vec{y} \in F$ $\quad$ F مستقر بالنسبة للقانون الداخلي $+$
2. $(\forall \vec{x} \in F)(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda\vec{x} \in F$ $\quad$ F مستقر بالنسبة للقانون الداخلي $\cdot$

الخاصية المميزة لفضاء متجهي جزئي

F فضاء متجهي جزئي من الفضاء E إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall (\vec{x},\vec{y}) \in F^2)(\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2) \quad \alpha\vec{x}+\beta.\vec{y} \in F$$

التأليفات الخطية

لتكن $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و .... و $\vec{x}_n$ متجهات من الفضاء المتجهي E و α_1 و α_2 و .... و α_n أعداد حقيقية

المتجهة $\vec{x}=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\vec{x}_i$ تسمى تأليفة خطية للمتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و .... و $\vec{x}_n$ ذات المعاملات α_1 و α_2 و ...... و α_n

أسرة مولدة

الأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,......,\vec{x}_n)$ مولدة للفضاء E $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x} \in E, \exists(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \ / \quad \vec{x}=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\vec{x}_i$

أسرة حرة

الأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,......,\vec{x}_n)$ حرة $\Leftrightarrow$

$$\forall(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \ / \quad \sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\vec{x}_i=\vec{0} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=......=\alpha_n=0$$

أساس فضاء متجهي حقيقي

الأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,.....,\vec{x}_n)$ أساس للفضاء E $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x}\in E, \exists!(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n \ / \quad \vec{x}=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i.\vec{x}_i$

- الأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,.....,\vec{x}_n)$ أساس للفضاء E $\Leftrightarrow$ B أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي E
- عدد متجهات الأساس B يسمى بعد الفضاء المتجهي E و نرمز له ب $\dim E$ ($\dim E = cardB$)