

# الدوال الأسية

## 1. الدالة الأسية النبيرية:

### أ. تعريف:

الدالة العكسية للدالة  $\ln$  تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها ب :  $\exp$

$$\text{ملاحظة: } \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$$

### ب. نتائج:

$$\begin{cases} e^x = y \\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ (y > 0) \end{cases} \quad \diamond$$

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\rightarrow ]0, +\infty[ \\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned} \quad \diamond$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0 \quad \text{و} \quad D_{\exp} = \mathbb{R} \quad \diamond$$

ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad \bullet$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y \quad \bullet$$

$$e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y \quad \bullet$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ln(e^x) = x \quad \diamond$$

$$\forall x > 0: e^{\ln x} = x \quad \diamond$$

$$e^1 = e \quad \text{و} \quad e^0 = 1 \quad \diamond$$

### ج. العمليات:

ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \quad (1)$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (2)$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad (3)$$

$$(r \in \mathbb{Q}) \quad (e^x)^r = e^{rx} \quad (4)$$

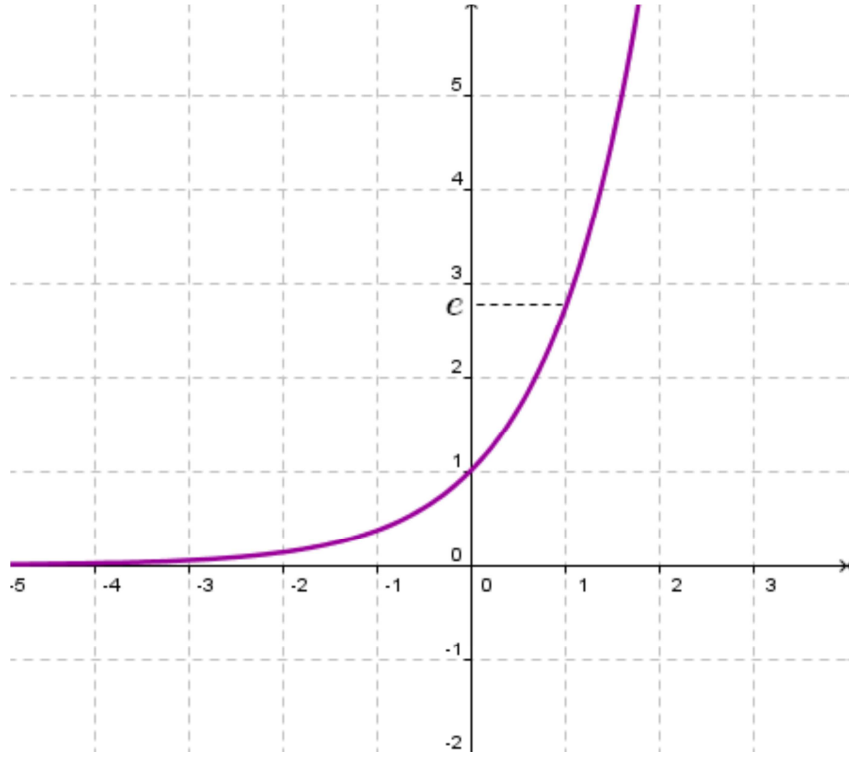
د. النهايات:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & n : \text{pair} \\ 0^- & n : \text{impair} \end{cases}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

ه. الاشتقاق و الأصلية:

<p>(1) الدالة exp قابلة للاشتقاق على <math>\mathbb{R}</math> و لدينا : <math>(e^x)' = e^x</math> <math>(\forall x \in \mathbb{R})</math></p> <p>(2) إذا كانت <math>U</math> دالة قابلة للاشتقاق على مجال <math>I</math> فإن الدالة <math>x \mapsto e^{U(x)}</math> قابلة للاشتقاق على <math>I</math> و لدينا :</p> $(\forall x \in I) (e^{U(x)})' = U'(x) e^{U(x)}$ <p>(3) <math>(\forall x \in I) (e^{rx})' = r e^{rx}</math></p> <p>(4)</p>	
<p>الأصلية</p> $e^x$ $\frac{1}{r} e^{rx}$ $r$ $e^{U(x)}$	<p>الدالة</p> $e^x$ $e^{rx}$ $U'(x) e^{U(x)}$

و. التمثيل المبياني للدالة  $\exp$



2. الدالة الأسية للأساس  $a$  حيث  $a > 0$  و  $a \neq 1$  :

أ. تعريف :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

ب. نتائج :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a} \quad \diamond$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(a^x) = x \ln a \quad \diamond$$

$$\begin{cases} \exp_a(x) = y \\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a(y) \\ (y > 0) \end{cases} \quad \diamond$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad \diamond$$

ج. العمليات :

ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :

$\frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \diamond$	$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad \diamond$
$(a^x)^y = a^{xy} \quad \diamond$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \diamond$

د. الاشتقاق و التغيرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (a^x)' = \ln a \times a^x$$

نتيجة :

- إذا كان :  $a > 1$   
فان  $\exp_a$  تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$   
ولدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0$
- إذا كان :  $0 < a < 1$   
فان  $\exp_a$  تناقصية قطعا على  $\mathbb{R}$   
ولدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = +\infty$