2ع ت — المتتاليات العددية

1.تعريف متتالية :

ليكن n_0 عددا طبيعيا .

عندما نربط كل عدد صحيح طبيعي $n_0 \le n$ بعدد حقيقي وحيد u_n

نقول إننا عرفنا متتالية عددية نرمز لها بالرمز $(u_n)_{n\ge n_0}$ أو (u_n).

العدد u_{n_0} يسمى الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$.

العدد u_n يسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$.

تعريف:متتالية مكبورة – مصغورة – محدودة

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ مكبورة بالعدد M يكافئ $u_n \le M$ لكل $n_0 \le n$.

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ مصغورة بالعدد m يكافئ $u_n \ge m$ لكل $n_0 \le n$.

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ محدودة يكافئ أنها مكبورة ومصغورة

يكافئ وجود عدد حقيقي موجب α حيث $|u_n| \le \alpha$ لكل $n_0 \le n$

رتابة متتالية :

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ تزايدية يكافئ $u_{n+1} - u_n \ge 0$ لكل $n_0 \le n$.

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ تناقصية يكافئ $u_{n+1} - u_n \le 0$ لكل $n_0 \le n$.

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ ثابتة يكافئ $u_{n+1} = u_n$ لكل $n_0 \le n$.

. كل متتالية تزايدية تكون مصغورة بحدها الأول .

. كل متتالية تناقصية تكون مكبورة بحدها الأول .

المتتالية الحسابية

.نقول إن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r ، غير مرتبط

بالعدد n ، حيث $u_{n+1} - u_n = r$ لكل $n_0 \le n$.

.صيغة الحد العام : $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ لكل $n_0 \le n$.

.العلاقة بين حدين : $u_n = u_p + (n-p)r$ لكل $n_0 \le n$ و $n_0 \le p$

.صيغة المجموع : $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \dfrac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

لكل عددين طبيعيين n و p من $[n_0;+\infty[$ حيث $p \le n$.

المتتالية الهندسية :

.نقول إن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q ، غير مرتبط

بالعدد n ، حيث $u_{n+1} = q\, u_n$ لكل $n_0 \le n$.

.صيغة الحد العام : $u_n = u_{n_0}.q^{(n-n_0)}$ لكل $n_0 \le n$.

.العلاقة بين حدين: $u_n = u_p.q^{(n-p)}$ لكل $n_0 \le n$ و $n_0 \le p$

.صيغة المجموع : $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

مع $q \ne 1$ لكل عددين طبيعيين n و p من $[n_0;+\infty[$ حيث $p \le n$.

نهاية متتالية :

.نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ هي عدد حقيقي l إذا كان كل مجال

مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة .

. نقول إن نهاية $(u_n)_{n\ge n_0}$ هي $(+\infty)$ إذا كان كل مجال من النوع

$[a;+\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة

تقارب متتالية.

نقول إن متتالية متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية .

كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة .

مصاديق تقارب متتالية :

.كل متتالية تزايدية ومكبورة تكون متقاربة .

.كل متتالية تناقصية و مصغورة تكون متقاربة .

.إذا كان : $v_n \prec u_n \prec w_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0

و $\lim v_n = \lim w_n = l \in R$

فإن : $(u_n)_{n\in I}$ تكون متقاربة و $\lim u_n = l$

.إذا كان : $|u_n - l| \prec v_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = 0$

فإن : $(u_n)_{n\in I}$ متتالية متقاربة و $\lim u_n = l$.

. إذا كان : $u_n \prec v_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = -\infty$

فإن : $(u_n)_{n\in I}$ متتالية متباعدة و $\lim u_n = -\infty$

.إذا كان : $v_n \prec u_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = +\infty$

فإن : $(u_n)_{n\in I}$ متتالية متباعدة و $\lim u_n = +\infty$

تقارب المتتالية ذات الحد العام a^n حيث $a \in R$:

.إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فإن $\lim a^n = 0$.

.إذا كان $a = 1$ فإن : $\lim a^n = 1$.

.إذا كان $a \succ 1$ فإن : $\lim a^n = +\infty$.

.إذا كان $a \le -1$ فإن : المتتالية (a^n) ليست لها نهاية .

تقارب المتتالية ذات الحد العام n^r حيث $r \in Q^*$:

.إذا كان $r \succ 0$ فإن $\lim\limits_{n} n^r = +\infty$

.إذا كان : $r \prec 0$ فإن $\lim\limits_{n} n^r = 0$

نهاية متتالية ترجعية :

لتكن f دالة متصلة على مجال I بحيث : $f(I) \subset I$ و u_0 عنصرا من I.

نعتبر المتتالية المعرفة بحدها الأول u_0 وبالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n

إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق أن $f(l) = l$.

نهاية المتتالية $v_n = f(u_n)$:

إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة نحو عدد l و f دالة متصلة في l

فإن المتتالية (v_n) تكون متقاربة نحو $f(l)$