2

# La derivabilité

## Le nombre derivé

$f$ est derivable au point $a \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

tel que $l \in \mathbb{R}$

## La derivabilité à droite ou à gauche

* Si $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \Rightarrow f$ est derivable à droite au point $a$ et $l = f'_d(a)$

* Si $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \Rightarrow f$ est derivable à gauche au point $a$ et $l = f'_g(a)$

* Si $f'_d(a) = f'_g(a) \Leftrightarrow f$ est derivable au point $a$

## L'équation de la tangente

$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$

## L'interpretation graphique

$\lim_{x \to a^{\pm}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

- $0$ : $(C)$ admet une demi tangente horizontale (à droite / à gauche) au point $M(a, f(a))$
- $l \in \mathbb{R}^*$ : $(C)$ admet une demi tangente (à droite / à gauche) au point $M(a, f(a))$ de coefficient directeur égal à $l$
- $\pm\infty$ : $(C)$ admet une demi tangente verticale (à droite / à gauche) au point $M(a, f(a))$
  - orienté vers le haut : si $a$ et $\infty$ ont le même signe
  - orienté vers le bas : si $a$ et $\infty$ ont deux signes differents

## La derivée de la fonction reciproque

Si $\begin{cases} f \text{ est derivable sur } I \\ \forall x \in I,\ f'(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ est derivable sur $J = f(I)$

Si $\begin{cases} f \text{ est derivable au point } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ est derivable au point $b = f(a)$

et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

## Exercice global

On considere la fonction $f$ definie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = x + 10 + 2\sqrt{x-1}$

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Etudier la derivabilité de $f$ à droite au point $a = 1$ et interpreter geometriquement ce resultat.
3. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x$ de $]1; +\infty[$.
   b. Dresser le tableau de variations.
4. Donner l'équation de la tangente au point de l'abscisse $a = 2$
5. Montrer que $f$ admet une fonction reciproque $f^{-1}$ definie sur un intervalle $J$ à determiner
6. a. Montrer que $f^{-1}$ est derivable en $14$
   b. Calculer $(f^{-1})'(14)$