

المتتاليات العددية

1. تذكير:

أ. المتتاليات الحسابية:

تعريف:

$$(u_n) \text{ حسابية } (r) \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r \text{ أساس } (u_n)$$

كتابة (u_n) بدلالة n :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

حساب المجموع:

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_m = (m - p + 1) \cdot \left(\frac{u_p + u_m}{2} \right)$$

ب. المتتاليات الهندسية:

تعريف:

$$(v_n) \text{ هندسية } (q) \Leftrightarrow v_{n+1} = qv_n \text{ أساس } (v_n)$$

كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_p \cdot q^{n-p}$$

حساب المجموع:

$$v_p + v_{p+1} + \dots + v_m = v_p \cdot \frac{1 - q^{m-p+1}}{1 - q} : \text{ إذا كان } q \neq 1$$

$$v_p + v_{p+1} + \dots + v_m = (m - p + 1)v_p : \text{ إذا كان } q = 1$$

ج. رتابة متتالية :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ تزايدية}$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ تناقصية}$$

$$u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow (u_n) \text{ ثابتة}$$

د. متتالية مصغرة - مكبورة - محدودة

$$m \leq u_n \Leftrightarrow (u_n) \text{ مصغرة بالعدد } m$$

$$u_n \leq M \Leftrightarrow (u_n) \text{ مكبورة بالعدد } M$$

$$m \leq u_n \leq M \Leftrightarrow (u_n) \text{ محدودة}$$

2. نهاية متتالية :

أ. تعريف:

نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي العدد الحقيقي l إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع الحدود u_n ابتداء من رتبة معينة ونكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$

ب. أمثلة اعتيادية :

$$(p \in \mathbb{N}^*) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad (1)$$

$$(p \in \mathbb{N}^*) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (2)$$

ج. خاصية :

إذا كانت (u_n) تقبل نهاية فإن هذه النهاية تكون وحيدة .

د. تعريف و مصطلحات :

- نقول إن (u_n) متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية
- نقول إن (u_n) متباعدة إذا كانت تقبل نهاية لا منتهية أو لا تقبل نهاية

3. العمليات على النهايات :

خاصيات :

لنكن (u_n) و (v_n) متتاليتان متقاربتان لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) \quad \bullet \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \times \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) \quad \bullet \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_n} \right) &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)} \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0 \right) \quad \bullet \end{aligned}$$

• ملاحظة : الخاصيات بالنسبة للعمليات على النهايات غير المنتهية هي نفسها على الدوال العددية

4. النهايات و الترتيب :

خاصيات

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \end{cases} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} |u_n - \alpha| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases} \quad (4)$$

5. نهاية المتتالية (q^n) :

خاصية :

(q^n) لا تقبل نهاية $q \leq -1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$: $-1 < q < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$: $q = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$: $q > 1$

خاصية :

- كل متتالية تزايدية و مكبورة فهي متقاربة
- كل متتالية تناقصية و مصغورة فهي متقاربة

6. نهاية المتتالية (n^r) ($r \in \mathbb{Q}^*$)

خاصية

إذا كان $r > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$

إذا كان $r < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0$

7. نهاية متتالية من نوع $v_n = f(u_n)$:

خاصية:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(l) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ و f متصلة في l

8. نهاية متتالية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$

خاصية:

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

إذا كانت f متصلة على I و $I \subset I$ و $f(I) \subset I$ و (u_n) متقاربة
فإن نهاية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x) = x$

ملاحظة:

- ❖ إذا كانت (u_n) تناقصية فإن $u_n \leq u_0$
- ❖ إذا كانت (u_n) تزايدية فإن $u_0 \leq u_n$

9. متتاليتان متحاديتان:

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان إحداهما تناقصية و الأخرى تزايدية و كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية و نقول أنهما متحاديتان

ملاحظة:

- ❖ إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان متحاديتان بحيث (u_n) تناقصية و (v_n) تزايدية فإن $v_n \leq u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)