

الإشتقاق

2 ع ت

1. قابلية اشتقاق دالة في عدد

إذا كان: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق

في a ومنحناها يقبل نصف مماس مواز لمحور الأرتاب .

إذا كان $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في a .

ومنحناها يقبل نصف مماس ليس لهما نفس الحامل .

في هذه الحالة $A(a, f(a))$ تسمى نقطة مزواة

تأويلات هندسية



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

0

 $l \in \mathbb{R}^*$ $+\infty$

f ق ش على اليمين
في a ومنحنى f يقبل
نصف مماس أفقي على
اليمين $M(a, f(a))$

f ق ش على اليمين
في a ومنحنى f يقبل
نصف مماس مائل على
اليمين $M(a, f(a))$

f غير ق ش على اليمين في a
ومنحنى f يقبل نصف مماس
عمودي على اليمين النقطة
في $M(a, f(a))$

ج. مشتقة المركبة .. مشتقة الدالة العكسية :

خاصية : مشتقة المركبة في نقطة

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث

$f(I) \subset J$. ليكن a عنصرا من I .

إذا كانت الدالة f ق ش في a و الدالة g ق ش في $f(a)$

فإن : $g \circ f$ ق ش في a و لدينا :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

خاصية : مشتقة المركبة على مجال

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث

$f(I) \subset J$.

إذا كانت الدالة f ق ش على I و الدالة g ق ش على J

فإن $g \circ f$ ق ش على I ولكل x من I : $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

خاصية :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I .

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في عدد a و $f'(a) \neq 0$ فإن الدالة

f^{-1} قابلة للاشتقاق في $b = f(a)$ ولدينا $f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(a)}$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه عدد a .

نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا كان : $l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a , ويكتب $f'(a)$.

وفي هذه الحالة لدينا : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

2- قابلية اشتقاق دالة على اليمين وعلى اليسار في عدد :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من النوع $[a, a + \varepsilon]$ حيث $\varepsilon > 0$.

f قابلة للاشتقاق على اليمين في a إذا كان : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$

هذه النهاية , عندما تكون منتهية , تسمى العدد المشتق للدالة f على

اليمين في a ونرمز له بالرمز : $f'_d(a)$.

بطريقة مماثلة نعرف قابلية اشتقاق دالة على اليسار في عدد .

نرمز للعدد المشتق للدالة f في العدد a بالرمز : $f'_g(a)$.

خاصية :

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في عدد a إذا وفقط إذا كانت قابلة

للاشتقاق على اليمين في a و قابلة للاشتقاق على اليسار في a

$$f'_d(a) = f'_g(a)$$

بتعبير آخر : $(f \text{ قابلة للاشتقاق في } a) \Leftrightarrow (f'_d(a) = f'_g(a))$.

خاصية : الاشتقاق والاتصال

كل دالة قابلة للاشتقاق في عدد a تكون متصلة في العدد a .

انته ! العكس غير صحيح . (اعتبر الدالة $x \rightarrow |x|$)

قابلية اشتقاق دالة على مجال

تكون دالة f ق ش على مجال $[a, b]$ إذا كانت ق ش في جميع نقطه .

تكون f ق ش على $[a, b]$ إذا كانت ق ش على $[a, b]$ وعلى اليمين في a

تكون f ق ش $[a, b]$ إذا كانت ق ش على $[a, b]$ وعلى اليسار في b .

ملاحظة : نعرف بالمثل قابلية اشتقاق دالة على باقي أنواع المجالات .

مماس منحني دالة - نصف مماس منحني دالة

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في عدد a عدد فإن منحناها يقبل مماسا في

النقطة $M(a, f(a))$ معادلته $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$

ملاحظة : العدد $f'(a)$ هو المعامل الموجه للمماس في a .

إذا كانت f ق ش على اليمين في a فإن منحناها يقبل نصف مماس على

اليمين في النقطة $M(a, f(a))$ معادلته : $\begin{cases} y = f'_d(a) \cdot (x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$

إذا كانت f ق ش على اليسار في a فإن منحناها يقبل نصف مماس على

اليمين في $M(a, f(a))$ معادلته : $\begin{cases} y = f'_g(a) \cdot (x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$

الإشتقاق

2ع ت

ليكن T عددا حقيقيا موجبا قطعاً. و f دالة معرفة على مجموعة D .

نقول إن f دورية و T دور لها إذا كان: $(\forall x \in D) : \begin{cases} x \pm T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

6. مشتقات الدوال الإعتيادية والعمليات :

الدالة f	الدالة المشتقة	حيث تعريف الدالة المشتقة
c	0	$\mathbf{R}$
ax	a	$\mathbf{R}$
x^n $n \in N^* - \{1\}$	$n x^{n-1}$	$\mathbf{R}$
x^r $n \in Z - \{-1\}$	$r x^{r-1}$	R_-^* أو R_+^*
$\sqrt[n]{x}$ $n \in N^* - \{1\}$	$\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	R_+^*
x^r $r \in Q^*$	$r x^{r-1}$	R_+^*
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	R_-^* أو R_+^*
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R_+^*
$\sin(ax+b)$	$a \cos(ax+b)$	$\mathbf{R}$
$\cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$	$\mathbf{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	على كل مجال ضمن $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	R_-^* أو R_+^*
e^x	e^x	$\mathbf{R}$
αu	$\alpha u'$	حيث تكون u ق ش
$u + v$	$u' + v'$	حيث تكون u و v ق ش
$u \cdot v$	$u'v + uv'$	حيث تكون u و v ق ش
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	حيث تكون u و v ق ش و v لا تنعدم
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	حيث تكون u ق ش و لا تنعدم
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	حيث تكون u ق ش و موجبة قطعاً
$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$	حيث تكون u ق ش و موجبة قطعاً
u^n $n \in N^* - \{1\}$	$nu^{n-1} \cdot u'$	حيث تكون u ق ش
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$	حيث تكون u ق ش و لا تنعدم
e^u	$u' e^u$	$\mathbf{R}$

خاصية: مشتقة دالة الجذر

ليكن n من $N^* - \{1\}$. دالة الجذر من الرتبة n ق ش على R_+^* ولدينا: $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ لكل x من R_+^*

خاصية

ليكن n من $N^* - \{1\}$ ، إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق وموجبة قطعاً على مجال I فإن الدالة $\sqrt[n]{u}$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا: $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n(\sqrt[n]{u})^{n-1}}$ لكل x من I .

4. تطبيقات:

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .
 f تزايدية على I يكافئ $f'(x) \geq 0$ لكل x من I .
 f تناقصية على I يكافئ $f'(x) \leq 0$ لكل x من I .

لتكن f دالة ق ش على مجال مفتوح I و x_0 عنصر من I تقبل مطرافاً في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها في x_0

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .
 I تقعر C موجه نحو الأعلى يكافئ $f''(x) \geq 0$ لكل x من I . هندسياً: C يوجد فوق جميع مماساته.
 I تقعر C موجه نحو الأسفل يكافئ $f''(x) \leq 0$ لكل x من I . هندسياً: C يوجد تحت جميع مماساته.
إذا كانت f' تنعدم في x_0 من I وتغير إشارتها بجوار x_0 فإن $I(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى C .
هندسياً: تقعر C يتغير في النقطة $I(x_0, f(x_0))$.

5. عناصر تماثل منحنى دالة:

لتكن f دالة معرفة على مجموعة D و a و b عددين حقيقيين.
يكون المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تماثل منحنى f إذا وفقط إذا كان لكل x من D لدينا $\begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$
تكون النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل منحنى f إذا وفقط إذا كان لكل x من D لدينا: $\begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

ملاحظات:



محور تماثل منحنى دالة دائماً يكون مواز لمحور الأرتيب.
مركز تماثل منحنى دالة لا ينتمي بالضرورة إليه.