ثانوية الجولان التأهيلية - بيوكرى -
نيابة أشتوكة أيت باها

ملخص درس الأعداد العقدية

الثانية علوم رياضية

الأستاذ أحمد مومني

I - جدر مربع عددي عقدي

$\boxed{u \text{ جدر مربع العدد العقدي } Z \Leftrightarrow u^2 = Z}$

الجدول التالي يحدد كيفية تحديد جدر مربع عدد عقدي مكتوب على شكله الجبري في كل الحالات الممكنة :

العدد العقدي على شكله الجبري		الجدرين المربعين للعدد العقدي
i		$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$ و $-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$
-i		$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$ و $-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$
ib, $b \in \mathbb{R}^*$	b>0	$\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$ و $-\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$
	b<0	$\sqrt{\frac{-b}{2}}(1-i)$ و $-\sqrt{\frac{-b}{2}}(1-i)$
$a \in \mathbb{R}$	a>0	$\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
	a<0	$\left(i\sqrt{-a}\right)$ و $-\left(i\sqrt{-a}\right)$
$a+ib$, $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$		نقوم بحل النظمة التالية: $\begin{cases} (x+iy)^2 = a+ib \\ \lvert x+iy\rvert^2 = \lvert a+ib\rvert \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$ حيث: $x+iy$ جدر مربع العدد العقدي $a+ib$

II) لحق نقطة و صورة عدد عقدي

نرمز ب $aff\left(M\right)$ أو Z_M للحق النقطة M في المستوى العقدي

لدينا التعريف التالي :

$$M\,(a,b) \Leftrightarrow aff\,(M\,) = a + ib$$

بعض الحالات الخاصة:

العدد العقدي	صورته في المستوى العقدي
i	$M\,(0,1)$
-i	$M\,(0,-1)$
1	$M\,(1,0)$
1-	$M\,(-1,0)$

خاصيات أساسية:

$$aff\,(\vec{u}+\vec{v}) = aff\,(\vec{u}) + aff\,(\vec{v})$$
$$aff\,(\alpha\vec{u}) = \alpha aff\,(\vec{u})$$
$$\|\vec{u}\| = |aff\,(\vec{u})|$$

$$aff\,(\overrightarrow{AB}) = aff\,(B) - aff\,(A)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |aff\,(B) - aff\,(A)|$$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ **مستقيميتين** $\Leftrightarrow \dfrac{aff\,(\vec{v})}{aff\,(\vec{u})} \in \mathbb{R}$

النقط ***A*** **و*B*** **و** ***C*** **مستقيمية** $\Leftrightarrow \dfrac{aff\,(B) - aff\,(A)}{aff\,(C) - aff\,(A)} \in \mathbb{R}$

$$\frac{aff\,(B) - aff\,(A)}{aff\,(D) - aff\,(C)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (AB)//(CD)$$

III) - خاصيات وقواعد أساسية

العدد العقدي	معيار العدد العقدي	عمدة العدد العقدي بترديد 2π	الكتابة $[r,\theta]$
$-Z$	$\lvert -Z\rvert=\lvert Z\rvert$	$\arg(-Z)=\pi+\arg(Z)$	$-[r,\theta]=[r,\theta+\pi]$
$\bar{Z}$	$\lvert\bar{Z}\rvert=\lvert Z\rvert$	$\arg(\bar{Z})=-\arg(Z)$	$\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$
ZZ'	$\lvert ZZ'\rvert=\lvert Z\rvert\lvert Z'\rvert$	$\arg(ZZ')=\arg(Z)+\arg(Z')$	$[r,\theta][r',\theta']=[rr',\theta+\theta']$
$\prod_{k=1}^{n}Z_k$	$\left\lvert\prod_{k=1}^{n}Z_k\right\rvert=\prod_{k=1}^{n}\lvert Z_k\rvert$	$\arg\left(\prod_{k=1}^{n}Z_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\arg(Z_k)$	$\prod_{k=1}^{n}[r_k,\theta_k]=\left[\prod_{k=1}^{n}r_k,\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right]$
$(n\in\mathbb{Z})\quad Z^n$	$\lvert Z^n\rvert=\lvert Z\rvert^n$	$\arg(Z^n)=n\arg(Z)$	$[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$
$\frac{1}{Z}$	$\left\lvert\frac{1}{Z}\right\rvert=\frac{1}{\lvert Z\rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{Z}\right)=-\arg(Z)$	$\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$
$\frac{Z}{Z'}$	$\left\lvert\frac{Z}{Z'}\right\rvert=\frac{\lvert Z\rvert}{\lvert Z'\rvert}$	$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right)=\arg(Z)-\arg(Z')$	$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$

العدد العقدي		عمدة العدد العقدي بترديد 2π
$Z=a$	$a>0$	0
	$a<0$	π
$Z=ib$	$b>0$	$\frac{\pi}{2}$
	$b<0$	$-\frac{\pi}{2}$

الشكل المثلثي لبعض الحالات الخاصة

$$1=[1,0]$$
$$-1=[1,\pi]$$
$$i=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$-i=\left[1,-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$
$$-\cos\theta+i\sin\theta=\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)$$
$$-\cos\theta-i\sin\theta=\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)$$

قياس الزاوية الموجهة

$$\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\arg\left(\frac{aff\ (\vec{v})}{aff\ (\vec{u})}\right)\quad[2\pi]$$
$$\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})}=\arg\left(\frac{aff\ (D)-aff\ (C)}{aff\ (B)-aff\ (A)}\right)\quad[2\pi]$$

الإخطاط

الإخطاط: حدف الأس باستعمال صيغتي أولير أو الأعداد المترافقة+حدانية نيوتن

$\cos^n x$, $\sin^n x$ $\longrightarrow$ $\cos nx$, $\sin nx$

نستعمل صيغة موافر + حدانية نيوتن

$\cos nx$, $\sin nx$ $\longrightarrow$ $\cos^n x$, $\sin^n x$

صيغ أولير

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} \qquad \sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

طريقة الأعداد المترافقة

$$Z = \cos x + i\sin x \qquad \bar{Z} = \cos x - i\sin x \qquad Z+\bar{Z} = 2\cos x \qquad Z-\bar{Z} = 2i\sin x$$

$$Z^n = \cos nx + i\sin nx \qquad \bar{Z}^n = \cos nx - i\sin nx \qquad Z^n+\bar{Z}^n = 2\cos nx \qquad Z^n-\bar{Z}^n = 2i\sin nx$$

IV) الكتابة العقدية للتحويلات الاعتيادية:

نعتبر التحويلات الاعتيادية التالية

- $R(\Omega,\alpha)$ الدوران الذي المركز Ω و زاويته α
- $t_{\vec{u}}$ الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$
- $h(\Omega,k)$ التحاكي ذو المركز Ω و النسبة k

نربط كل نقطة M من المستوى العقدي ذات اللحق Z بصورتها بإحدى التحويلات الاعتيادية M' ذات اللحق Z' فنحصل على نتائج الجدول أسفله:

التحويل الاعتيادي	العلاقة المتجهية	الصيغة العقدية
الدوران $R(\Omega,\alpha)$ بحيث $aff(\Omega)=\omega$	$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha[2\pi] \end{cases}$	$Z'-\omega=(Z-\omega)e^{i\alpha}$
الإزاحة $t_{\vec{u}}$ بحيث $aff(\vec{u})=a$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$	$Z'=Z+a$
التحاكي $h(\Omega,k)$ بحيث $aff(\Omega)=\omega$	$\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$	$Z'-\omega=k(Z-\omega)$