

## المظاهر الطاقية

### I - شغل قوة

#### 1 - شغل قوة ثابتة ( تذكير )

نعتبر عن شغل قوة ثابتة  $\vec{F}$  عند انتقال نقطة تأثيرها من  $A$  إلى نقطة  $B$  بالعلاقة التالية :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overline{AB} = F \cdot AB \cdot \cos \alpha$$

بحيث أن  $\alpha$  الزاوية بين  $\vec{F}$  و  $\overline{AB}$

$AB$  المسافة الفاصلة بين النقطة  $A$  و النقطة  $B$  تسمى بالانتقال ونعبر عنها بالمتر (m)  
شدة القوة ب (N)

$W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$  شغل القوة  $\vec{F}$  ونعبر عنه بالجول (J)

\* لا يتعلق شغل قوة ثابتة بالمسار المتبع من طرف نقطة التأثير

#### 2 - الشغل الجزئي لقوة غير ثابتة

نعتبر قوة  $\vec{F}$  غير ثابتة ونقطة تأثيرها تنتقل من  $A$  إلى  $B$  .

لحساب شغل غير ثابتة نجزم المسار إلى مسارات جزئية  $\delta \vec{\ell}$  متناهية في الصغر تسمح باعتبار  $\vec{F}$  ثابتة في كل منها .

تعبير الشغل الجزئي للقوة  $\vec{F}$  خلال الانتقال الجزئي  $\delta \vec{\ell}$  هو :  $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \delta \vec{\ell}$

الشغل الكلي للقوة المتغيرة  $\vec{F}$  هو مجموع الأشغال الجزئية :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \sum_A^B \delta W(\vec{F}) = \sum_A^B \vec{F} \cdot \delta \vec{\ell}$$

#### 3 - شغل القوة الخارجية المطبقة من طرف نابض

نعتبر نابضا  $R$  ذا لفات غير متصلة صلابته  $k$  وكتلته مهملة ، في وضع أفقي على مستوى أفقي .  
نثبت أحد طرفيه بحامل ثابت .

نطبق على النابض عند طرفه الحر  $M$  قوة  $\vec{F}'$  ،  
فيطال النابض بحيث تنتقل النقطة  $M$  بالمقدار

$$\vec{OM} = x \vec{i}$$

تمثل النقطة  $O$  موضع  $M$  في الحالة البدئية للنابض .

حسب القانون الثالث لنيوتن ، قانون التأثيرات

المتبادلة ، فإن النابض يطبق قوة  $\vec{F}$  على المجرب

وهي قوة ارتداد  $\vec{F} = -\vec{F}'$  بحيث أن  $\vec{F} = -kx \vec{i}$  أي

أن  $\vec{F}' = kx \vec{i}$  أي أن  $\vec{F}'$  تتعلق بالأفصول  $x$  إذن

فهي غير ثابتة .

تعبير شغل القوة  $\vec{F}'$  عندما ينتقل طرف النابض من  $A$  إلى  $B$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \sum_A^B \delta W(\vec{F}') = \sum_A^B \vec{F}' \cdot \delta \vec{\ell} = \sum_A^B kx \vec{i} \cdot \delta x \vec{i}$$

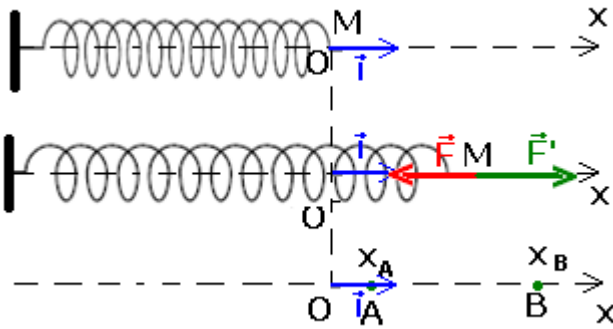
يمكن استعمال طريقتين لتحديد هذا المجموع :

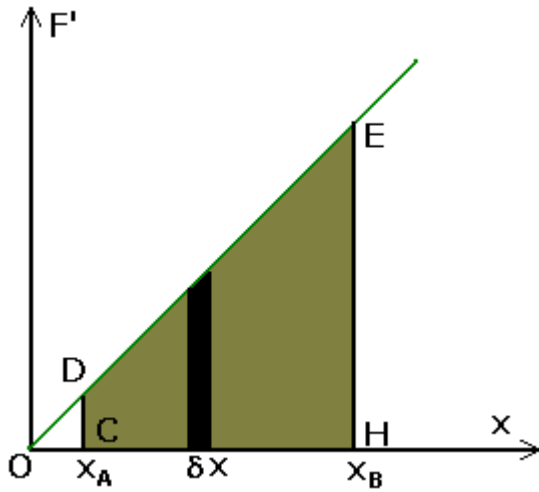
#### أ - الطريقة المباشرة :

في نظمة محورين تمثل تعبيرات  $F$  بدلالة الأفصول  $x$  وهي إطالة النابض .  $F = kx$  أي أنها دالة خطية تمر من أصل النظمة .

يوافق الشغل الجزئي  $\delta W(\vec{F}') = k \cdot x \cdot \delta x$  مساحة المستطيل الجزئي بالأسود المبين في الشكل

جانبه .





عند انتقال النقطة M من A أفصولها  $x_A$  إلى B أفصولها  $x_B$  ،

فإن الشغل الكلي للقوة  $\vec{F}'$  يوافق مجموع مساحات المستطيلات الجزئية ويساوي مساحة شبه المنحرف CDEF

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = a_{CDEF} = a_{OEH} - a_{OCD}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$$

ب - الطريقة التحليلية

نعوض في العلاقة السابقة المجموع  $\sum$  بالتكامل  $\int$  ولانتقال الجزئي  $\delta \ell$  ب المقدار التفاضلي  $dx$  فنحصل على العلاقة التالية :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \int_{x_A}^{x_B} kx dx = \left[ \frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_A}^{x_B}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$$

خلاصة :

تعبير شغل قوة المطبقة من طرف مجرب على الطرف الحر ل نابض يجعله ينتقل من موضع A إلى موضع

$$B \text{ أفصولهما على التوالي } x_A \text{ و } x_B \text{ هو : } W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$$

$$\text{وبما أن } \vec{F} = -\vec{F}' \text{ فإن شغل قوة الارتداد المطبقة من طرف النابض هو : } W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2$$

يتعلق شغل قوة الارتداد  $\vec{F}$  بالموضع البدئي والموضع النهائي لمركز قصور الجسم .

## II - طاقة الوضع المرنة

عندما يكون النابض مضغوطا أو مطالا فإنه يخترن يخترن طاقة ترتبط بحالة تشوّهه تسمى طاقة الوضع المرنة .

عندما يطبق المجرب قوة  $\vec{F}'$  على الطرف الحر للنابض لجعل نقطة تأثيره تنتقل من النقطة A أفصولها  $x_A$  في حالة سكون إلى النقطة B أفصولها  $x_B$  حيث توجد كذلك في حالة سكون ، فإنه حسب

مبرهنة الطاقة الحركية لدينا :

$$\frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}')$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2$$

أي أن الشغل المطبق من طرف المجرب على طرف النابض يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { المجرب ، النابض } وهي طاقة وضع مرنة .

$$\text{نضع أن } W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_{pe}(A) - E_{pe}(B)$$

نعرف طاقة الوضع المرنة لمجموعة مكونة من { جسم - نابض } في وضع أفقي هي الطاقة التي

$$\text{تخترن هذه المجموعة من جراء تشويه الجسم وتعبيرها هو : } E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2 + C$$

C ثابتة تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية لطاقة الوضع المرنة .

وبصفة عامة نختار طاقة الوضع المرنة منعقدة في الموضع الموافق للأفصول  $x=0$  حيث  $(C=0)$  فيكون تعبير طاقة الوضع المرنة هو :  $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$  وحدتها في النظام العالمي للوحدات هي الجول . و

$x$  إطالة النابض و  $k$  صلابته .

ملحوظة :  ${}^B_A \Delta E_{pe} = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$

### III - الدراسة الطاقية للمجموعة { جسم صلب ، نابض } في وضع أفقي .

#### 1 - الطاقة الحركية للمجموعة .

يتوفر الجسم الصلب غير قابل للتشويه كتلته  $m$  وسرعته  $v$  في إزاحة بالنسبة لمرجع معين ، على

طاقة حركية  $E_C$  بحيث  $E_C = \frac{1}{2}mv^2$  وحدة  $E_C$  في النظام العالمي للوحدات هي الجول .

بما أن الجسم في حركة إزاحة ، فإن سرعة الجسم الصلب هي سرعة مركز قصوره بالنسبة لمتذبذب مرن ، الطاقة الحركية لهذا المتذبذب هي الطاقة الحركية للجسم الصلب

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \text{ بحيث أن } E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

#### 2 - الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

##### تعريف بالطاقة الميكانيكية :

في مرجع معين الطاقة الميكانيكية لمجموعة ما في لحظة  $t$  هي مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع لهذه المجموعة .

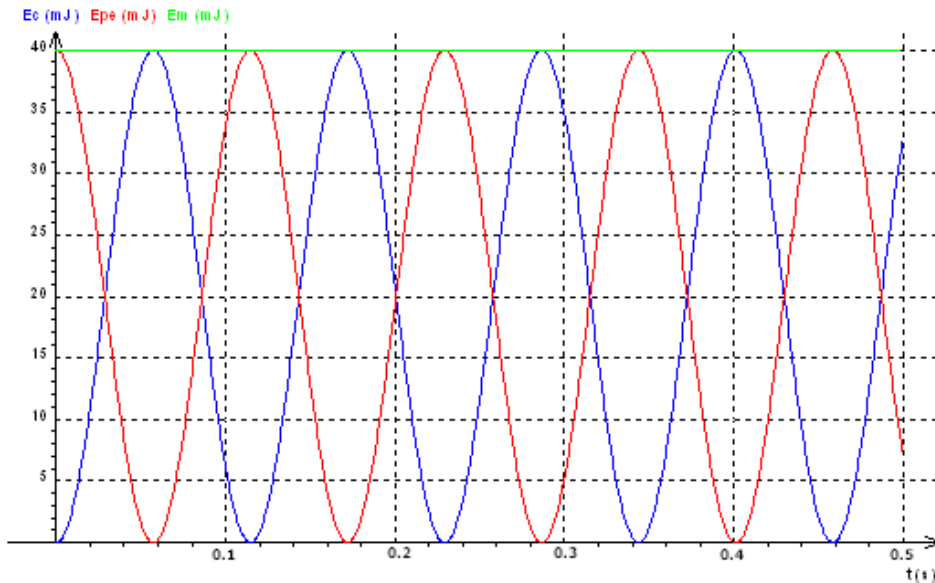
طاقة الوضع لمتذبذب مرن أفقي هي مجموع طاقة وضعه الثقالية وطاقة وضعه المرنة  $E_p = E_{pp} + E_{pe}$

نختار الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية منطبقاً مع المستوى الأفقي المار من  $G$  مركز قصور المتذبذب ( $E_{pp} = 0$ ) نحصل على  $E_p = E_{pe}$  أي أن تعبير الطاقة الميكانيكية لمجموعة مكونة من جسم

$$\text{صلب ونابض أفقي هو : } E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + C$$

باختيار حالة مرجعية لطاقة الوضع المرنة وهي :  $E_{pe} = 0$  عند التوازن أي ان  $x=0$  نحصل على التعبير

$$\text{التالي : } E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$



### أ - حالة إهمال الاحتكاكات

في هذه الحالة يبقى وسع التذبذبات  $x_m$  ثابتا ، فنحصل على نظام دوري دوره الخاص  $T_0$  ، فيكون

عندنا انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة .  $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$  مهما كانت قيم  $x$  و  $v$

\_ عندما تأخذ الاستطالة قيمتها القصوية  $x_m$  فإن الطاقة الميكانيكية  $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2$

\_ عنما تكون الاستطالة منعدمة  $x=0$  فإن  $E_m = \frac{1}{2}mv_m^2$  وبالتالي فإن  $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$  ومنه

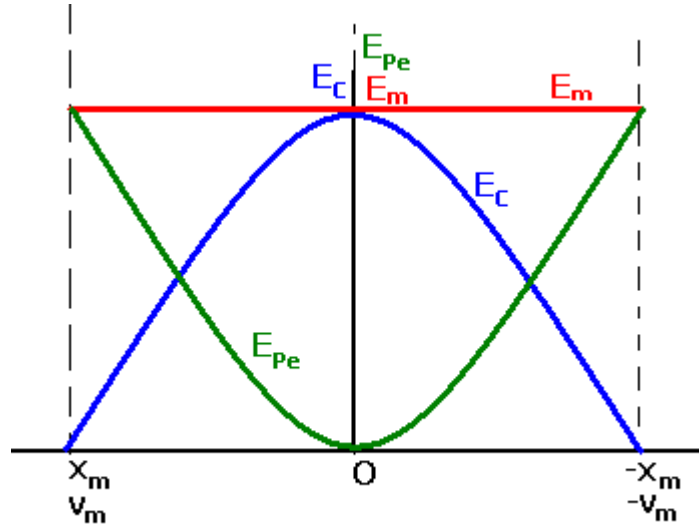
$$v_m = x_m \sqrt{\frac{k}{m}}$$

كذلك يمكن أن نحصل على المعادلة التفاضلية للمتذبذب انطلاقا من الطاقة الميكانيكية أي بعملية اشتقاقها بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE_m}{dt} = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

مخططات الطاقة للنواس المرن الأفقي :

تمثيل على نفس النظمة  $E_{pe}$  و  $E_C$  و  $E_m$



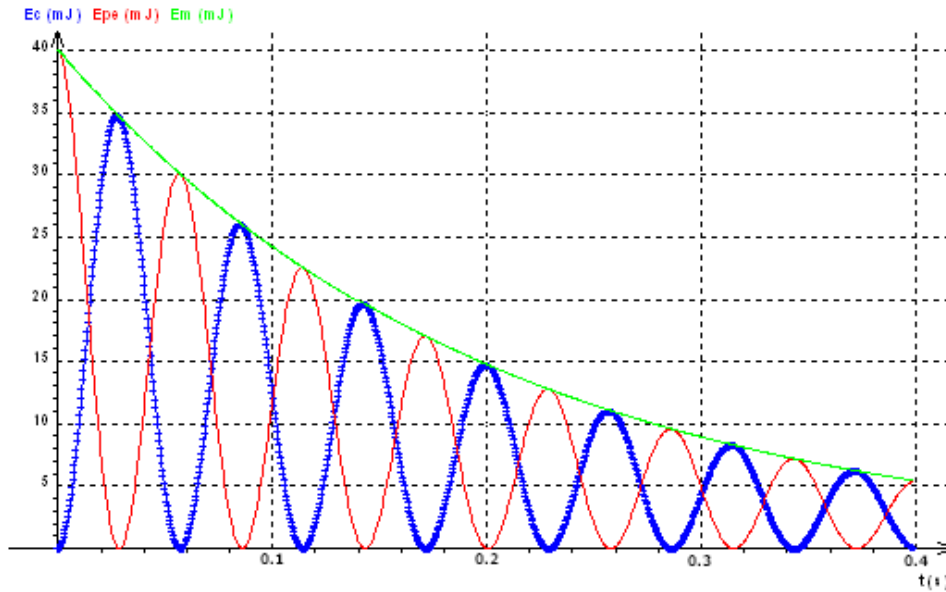
**خلاصة :** في غياب الاحتكاكات تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنواس مرن أفقي وحر .

### ب - حالة احتكاكات غير مهمة .

في هذه الحالة يتناقص وسع الذبذبات تدريجيا مع الزمن  $t$  ، فنحصل على نظام شبه دوري أو لا دوري في حالة احتكاكات مهمة .

يعزى تناقص الطاقة الميكانيكية للمجموعة مع الزمن  $t$  إلى الانتقال الحراري ( وجود الاحتكاكات )

شكل منحنى تغيرات  $E_m$  و  $E_C$  و  $E_{pe}$  بدلالة الزمن :



## IV - الدراسة الطاقية لنواس اللي .

### 1 - الطاقة الحركية للمجموعة .

المجموعة المتذبذبة هي { القضيب - السلك }  
بما أن السلك كتلته مهملة فإن الطاقة الحركية لنواس اللي تنحصر في الطاقة الحركية للقضيب ، وبما أنه في حركة دوران حول محور ثابت ( $\Delta$ ) سيكون تعبير الطاقة الحركية على الشكل التالي :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 \quad \text{حيث } J_{\Delta} \text{ عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور } (\Delta) \text{ المجسد من طرف السلك و } \dot{\theta} \text{ السرعة الزاوية لدوران القضيب .}$$

### 2 - طاقة الوضع للي المجموعة .

نعتبر نواس لي ثابتة ليه  $C$  في حركة تذبذبية حول محور ( $\Delta$ ) يجسده السلك ، عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور ( $\Delta$ ) هو  $J_{\Delta}$  . نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على هذه المجموعة بين موضعين أفصولهما الزاوي تباعا :  $\theta_1$  و  $\theta_2$  .

جرد القوى المطبقة على القضيب أثناء حركته :  $\vec{P}$  وزن القضيب وتأثير السلك على القضيب  $\vec{R}$  وإلى مزدوجة اللي عزمها  $\mathcal{M}_C = -C.\theta$  ،

نطبق المبرهنة :  $\frac{1}{2} J_{\Delta} \theta_2^2 - \frac{1}{2} J_{\Delta} \theta_1^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W_C$  بما أن خط تأثير القوتين  $\vec{P}$  و  $\vec{R}$  يتقاطعان

$$\text{مع المحور } (\Delta) \text{ فإن شغلها منعدم أي أن } \frac{1}{2} J_{\Delta} \theta_2^2 - \frac{1}{2} J_{\Delta} \theta_1^2 = W_C$$

نعلم أن المعادلة الزمنية لحركة المجموعة المتذبذبة هي على الشكل التالي :  $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$

نأخذ  $\varphi = 0$  لتبسيط العمليات الحسابية .

$$\theta_1 = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t_1\right) \text{ و } \theta_2 = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t_2\right) \text{ أي أن } \dot{\theta}_1 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t_1\right) \text{ و } \dot{\theta}_2 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t_2\right)$$

$$W_C = \frac{1}{2} C \theta_1^2 - \frac{1}{2} C \theta_2^2 \quad (1) \text{ وبتعويض هذه التعابير في العلاقة}$$

هذه العلاقة تمثل شغل مزدوجة اللي عندما يتغير الأضول الزاوي من  $\theta_1$  إلى  $\theta_2$  . أي أن شغل مزدوجة اللي يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { القضيب - السلك } وهي طاقة الوضع للي .  $W_C = E_{pt}(1) - E_{pt}(2)$  بحيث أن  $E_{pt}(1) = \frac{1}{2}C\theta_1^2$  و  $E_{pt}(2) = \frac{1}{2}C\theta_2^2$  وبالتالي نعرف طاقة الوضع

للي بالمقدار التالي :  $E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$  ، ثابتة تتعلق بالحالة المرجعية وتحدده الشروط البدئية

### 3 - الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي هو :  $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$  .

#### أ - في حالة احتكاكات مهملة .

نعتبر أن التذبذبات الأولى لنواس لي حر غير مخمدة معادلته التفاضلية  $J_\Delta \ddot{\theta} + C\theta = 0$  . انطلاقا من تعبير الطاقة الميكانيكية يمكن أن نبين أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة وذلك باشتقاق تعبير  $E_m$  بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE_m}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} \dot{\theta} + C\theta \dot{\theta} = \dot{\theta} (J_\Delta \ddot{\theta} + C\theta) = 0 \Rightarrow E_m = cte$$

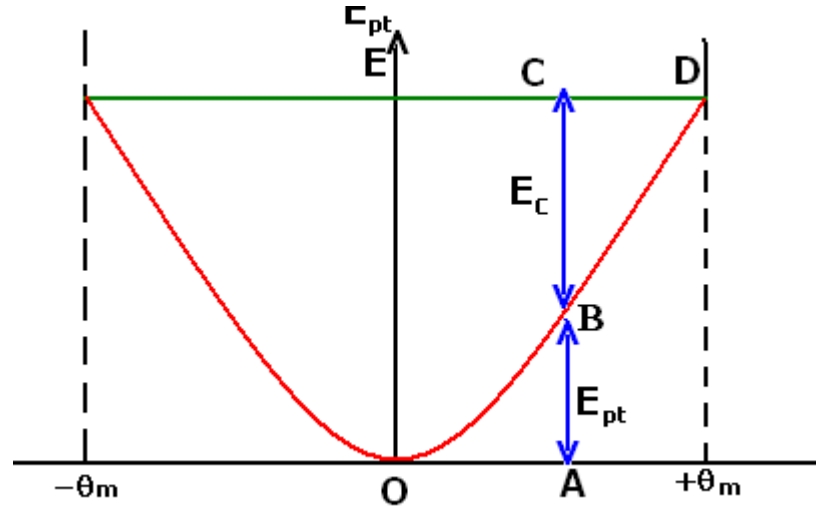
أي أن الطاقة الميكانيكية تنحفظ .

ويمكن أن نبين كذلك انطلاقا من المعادلة الزمنية  $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$  أن هذه الثابتة هي :

$$E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = cte$$

**خلاصة :** تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنواس لي حر وغير مخمد :  $E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = cte$

مخططات الطاقة هي على الشكل التالي :



من خلال مخططات الطاقة يتبين أنه خلال التذبذبات الحرة غي المخمدة لنواس لي تتحول الطاقة الحركية إلى طاقة وضع والعكس صحيح .

#### ب - في حالة وجود الاحتكاك

تتناقص الطاقة الميكانيكية للنواس اللي بحيث تتحول إلى طاقة حرارية .

### V - الدراسة الطاقية للنواس الوزن

نعتبر المجموعة النواس الوزن {الحامل - الجسم S} بحيث أن  $J_{\Delta}$  عزم قصور الجسم S ونمعلم حركة مركز قصوره بالأفصول الزاوي  $\theta$  عند كل لحظة t بالنسبة لمعلم مرتبط بمرجع أرضي .

**- الطاقة الحركية للمجموعة :** يتوفر النواس الوزن على طاقة حركية في المرجع المرتبط بالأرض :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

**- طاقة الوضع الثقالية للمجموعة**

تعبير طاقة الوضع الثقالية لنواس وزن في مجال الثقالة هو :

$$E_{pp} = mgz + cte$$

مركز قصوره في المعلم  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  متعامد وممنظم

محوره  $(O, \vec{k})$  رأسي وموجه نحو الأعلى ، و g شدة

الثقالة .

الثابتة cte تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية .

**- الطاقة الميكانيكية للنواس الوزن.**

$$E_m = E_C + E_{pp}$$

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس وزن في معلم مرتبط

بمرجع أرضي هو :

$$E_m = mgz + \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + cte$$

**مثال :**

حسب الشكل :  $z = z_0 + h$  بحيث أن

$$O'G = d \text{ نضع } h = O'G - O'G \cos \theta$$

$$z = z_0 + d(1 - \cos \theta)$$

يمكن تحديد الثابتة cte انطلاقا من الحالة المرجعية :

$$E_{pp} = 0 \text{ عند } z = z_0 \text{ أي أن } cte = -mgz_0$$

$$\therefore E_m = mgd(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = mg\dot{\theta} \sin \theta + J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$= \dot{\theta} (mgd \sin \theta + J_{\Delta} \ddot{\theta}) = 0$$

$$E_m = cte$$

في غياب للاحتكاكات تبقى الطاقة الميكانيكية للنواس

الوازن في مجال الثقالة ثابتة . **إذن النواس الوزن**

**مجموعة محافظته**

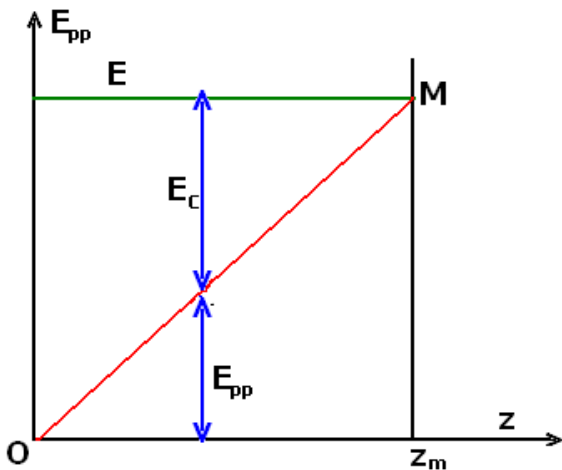
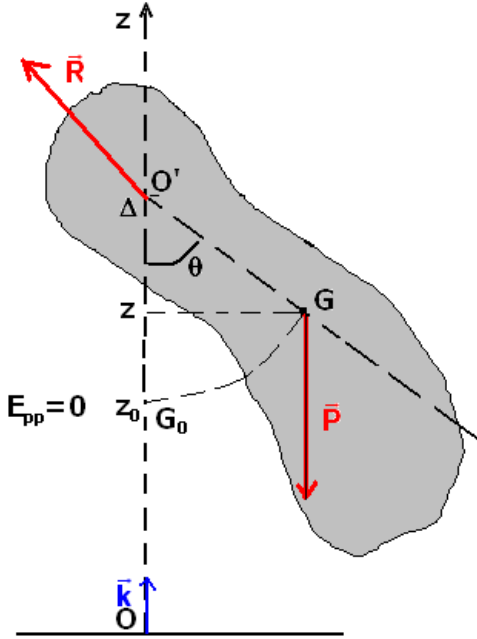
**- مخططات الطاقة**

**أ - الحالة العامة**

\* التمثيل المبياني لتغيرات طاقة الوضع الثقالية بدلالة الأنسوب z .

$$E_{pp} = mgz$$

$$E_m = g(z) = cte$$



$$E_m - E_{pp} = E_c$$

الطاقة الحركية إما موجبة أو منعدمة.

في النقطة M  $E_c = 0$  و  $E_{pp} = mgz_M$

$$E_m = E_{pp} = mgz_M$$

أي أن z لا يمكنها أن تتجاوز  $z_M$  يعني أن  $z < z_M$

في النقطة O :  $E_{pp} = 0$  و  $E_c = E_m = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$

عندما تزداد z تنقص الطاقة الحركية  $E_c$  تزداد طاقة الوضع  $E_{pp}$  إلى أن تصبح  $z = z_m$  فيتوقف الجسم

أي أن  $E_c = 0$

### ب - حالة النواس الوازن

- طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن نختار كحالة مرجعية  $E_{pp} = 0$  بالنسبة  $z = z_0$  في هذه الحالة

$$E_{pp} = mgd(1 - \cos \theta)$$

- مخططات الطاقة

الطاقة الميكانيكية وهي ثابتة بالنسبة للنواس الوازن  $E_m = E_{pp} + E_c$

$$E_{pp} = f(\theta) \text{ طاقة الوضع الثقالية } E_{pp} = mgd(1 - \cos \theta)$$

حساب تغيرات  $E_{pp}(\theta)$

$$\frac{dE}{d\theta} = mgd \dot{\theta} \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0$$

$$\theta = \pi \text{ أو } \theta = -\pi$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq E_{pp} \leq 2mgd$$

### الحالة الأولى:

$$E_m > 2mgd \text{ و } E_m = E_{pp} + E_c \text{ أي أن } E_c > 0$$

وبالتالي فالنواس الوازن لا يتوقف ويمكنه ان يدور حول المحور ( $\Delta$ )

### - الحالة الثانية :

$E_m < 2mgd$  أي أن  $E_c = E_m - E_{pp}$  وبما أن  $E_c \geq 0$  في هذه الحالة تنعدم الطاقة الحركية للنواس

الوازن بالنسبة لقيمتين  $\theta_m$  و  $-\theta_m$  في هذه الحالة

للمجموعة حركة تذبذبية حرة وغير مغمدة تتحول خلالها

الطاقة الحركية إلى طاقة وضع ثقالية  $\Delta E_c = -\Delta E_{pp}$ .

في حالة ذبذبات ذات وسع صغير  $\sin \theta \approx \theta$  و  $\sin \theta \approx \theta$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$E_p = mgd \left( 1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = mgd \frac{\theta^2}{2}$$

