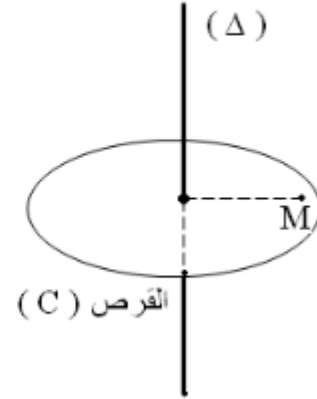
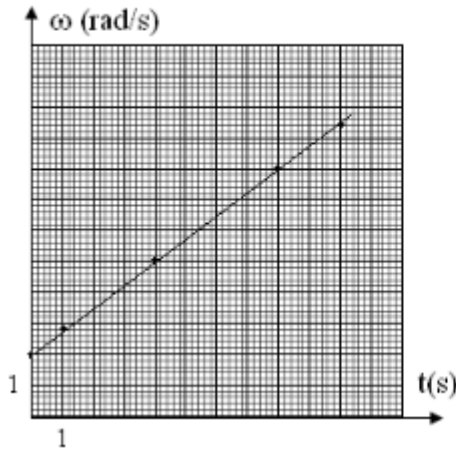


تمارين حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

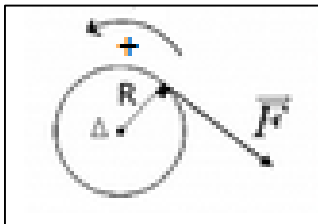
تمرين 1 :

- نعتبر قرصا في دوران حول محور ثابت (Δ) رأسي . عزم قصور القرص $J_{\Delta} = 6.10^{-2} \text{ kg.m}^2$.
- 1- يمثل المنحنى جانبه مخطط السرعة الزاوية لحركة نقطة M توجد على بعد $r = 10 \text{ cm}$ من المحور Δ .
1-1- ماهي طبيعة حركة M ؟ علل جوابك .
 - 2-1- حدد قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ واكتب معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta} = f(t)$.
 - 2- علما أن الأفصول الزاوي منعدم عند اللحظة أصل التواريخ .
1-2- أكتب المعادلة الزمنية للحركة $\theta = f(t)$.
 - 2-2- أحسب عدد الدورات المنجزة من طرف القرص بين التاريخين $t_1 = 4,0 \text{ s}$ و $t_2 = 5,2 \text{ s}$.
 - 3-2- نعتبر اللحظة ذات التاريخ $t = 2 \text{ s}$. أحسب في هذه اللحظة قيمتي التسارع المماسي a_t والتسارع المنظمي a_n للنقطة M ، استنتج منظم التسارع .
 - 3- أحسب مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ .



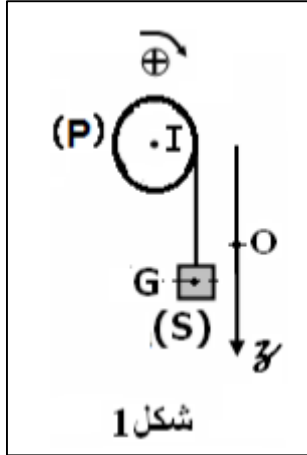
تمرين 2 :

- تدو أسطوانة شعاعها $R = 1,2 \text{ m}$ وكتلتها $M = 100 \text{ kg}$ بسرعة تساوي $N = 120 \text{ tr.min}^{-1}$.
- في اللحظة $t = 0$ يبدأ كبها بواسطة قوة $\vec{F}$ مماسة للأسطوانة ، وشدتها $F = 50 \text{ N}$ نعطي عزم قصور الأسطوانة $J_{\Delta} = \frac{1}{2}MR^2$.



- 1- أحسب السرعة الزاوية للأسطوانة في اللحظة $t = 0$.
- 2- بتطبيق العلاقة الأساسية لديناميك أعط تعبير التسارع الزاوي للأسطوانة بدلالة F و J_{Δ} و R .
- 3- عبر عن السرعة الزاوية بدلالة t و F و R و J_{Δ} و ω_0 .
- 4- بين أن مدة الكبح تكتب على الشكل : $t = \frac{m.R.\omega_0}{2F}$. أحسب t .

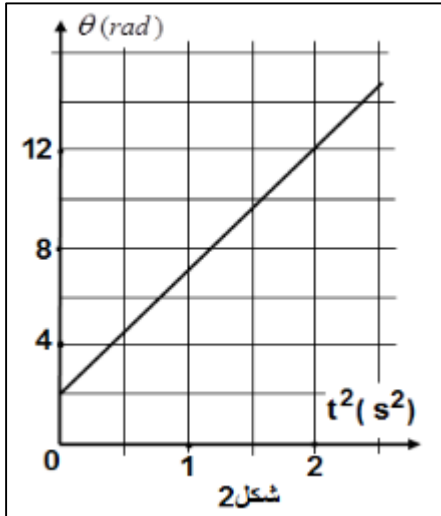
تمرين 3:



يمثل الشكل (1) بكرة (P) متجانسة شعاعها $r = 10\text{cm}$ ، وعزم قصورها $J_D = 10^{-2}\text{kg.m}^2$ قابلة للدوران باحتكاك حول محور (Δ) ثابت وأفقي يمر من مركزها I ، ملف حول الأسطوانة خيطا غير قابل للإمتداد وكتلته مهملة ، ويحمل في طرفه الآخر جسما صلبا (S) كتلته $m = 200\text{g}$ ، نمعلم موضع G مركز قصور (S) بالأنسوب z في المعلم $(O; \vec{k})$ ، حيث المحور Oz رأسي وموجه نحو الأسفل منحى حركة (S) .

1- عند لحظة $t_0 = 0$ ، نحرر المجموعة {البكرة ، الخيط ، (S)} بدون سرعة بدئية .

مكنك الدراسة التجريبية لحركة البكرة (P) من الحصول على المبيان الممثل في الشكل (2) ، الذي يمثل تغيرات الأفصول الزاوي θ لحركة البكرة (P) بدلالة t^2 .



1-1- عين مبيانيا ، المعادلة الزمنية $\theta = f(t)$ لحركة البكرة .

2-1- تحقق أن قيمة التسارع الزاوي للبكرة هي : $\ddot{\theta} = 10\text{rad.s}^{-2}$ ، واستنتج طبيعة حركة البكرة .

3-1- استنتج المعادلة الزمنية $z = f(t)$ لحركة G مركز قصور الجسم (S) .

2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S) ، أحسب شدة توتر الخيط .

3- أحسب ، بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة ، قيمة عزم مزدوجة الاحتكاك الذي نعتبره ثابتا خلال دوران البكرة .

4- عند اللحظة $t_1 = 2\text{s}$ يتقطع الخيط فتواصل البكرة دورانها الى أن تتوقف عند اللحظة t_2 .

4-1- أوجد عدد الدورات التي أنجزتها البكرة بين اللحظتين t_1 و t_2 .

4-2- أوجد المعادلة الزمنية لحركة الجسم (S) بعد اللحظة t_1 . نهمل تأثير الهواء.

تمرين 4:

نعتبر جسما صلبا (S₁) كتلته $m_1 = 1\text{kg}$ قابل للإنزلاق على سكة أفقية. نربط الجسم (S₁) بجسم آخر (S₂)

كتلته m_2 بواسطة خيط غير مدود ، كتلته مهملة ، يمر بمجرى بكرة (B) متجانسة شعاعها $r=4\text{ cm}$ قابلة للدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) أفقي يمر من مركزها .خلال الحركة لا ينزلق الخيط على البكرة (B) . عزم قصور (B) بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .

نحرر المجموعة المتكونة من (S_1) و (S_2) و (B) بدون سرعة بدئية عند اللحظة ذات التاريخ $t_0=0$. يمثل المنحنى الممثل في الشكل (2) تغيرات السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ للبكرة .

1-أوجد مبيانيا معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta}$.

2-حدد معللا جوابك طبيعة حركة (B) .

3-أوجد تعبير n عدد الدورات المنجزة من طرف (B) عند اللحظة t بدلالة الزمن t و $\dot{\theta}$ السارع الزاوي لحركة (B) .أحسب n عند اللحظة $t=1,25\text{ s}$.

4-حدد ، معللا جوابك ، طبيعة حركة كل من (S_1) و (S_2) ، ثم أحسب قيمة تسارعهما a .

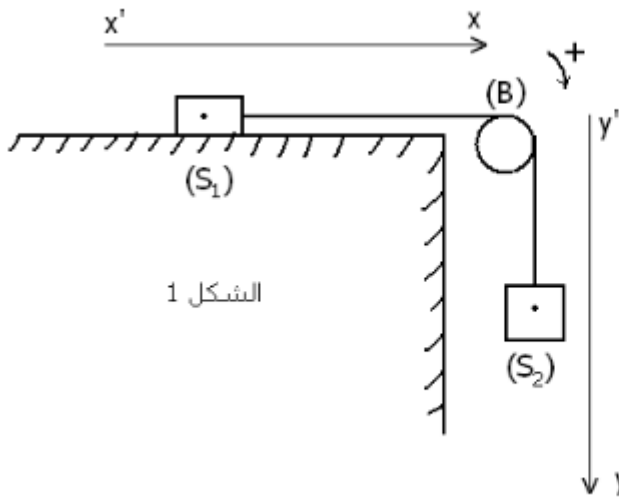
5-يتم التماس بين (S_1) والسكة باحتكاك حيث φ زاوية الاحتكاك . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على كل من (S_1) و (S_2) والعلاقة الأساسية للديناميك للدوران على (B)، بين أن تعبير التسارع يكتب على الشكل التالي :

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \cdot k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

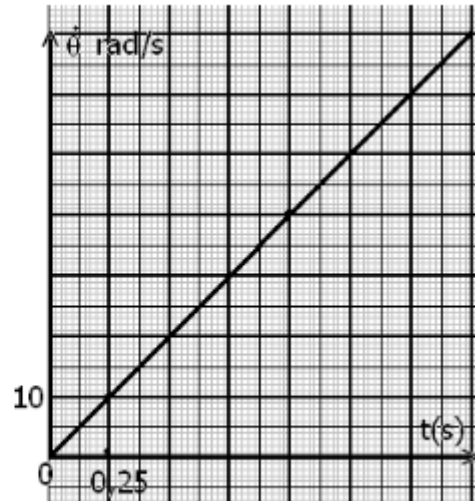
حيث g تسارع الثقالة و $k=\tan\varphi$ معامل الاحتكاك .

6-بين أن حركة (S_1) لا تتم إلا إذا كانت m_2 كتلة (S_2) أكبر من قيمة يجب تحديدها .

نعطي : $k=\tan\varphi = 0,16$



الشكل 1



الشكل 2

تصحيح تمارين حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

تصحيح تمرين 1:

1-1- طبيعة حركة النقطة M :
من خلال المبيان الممثل للسرعة الزاوية ω بدلالة الزمن يتبين أن السرعة الزاوية دالة تآلفية بالنسبة للزمن وبالتالي فحركة النقطة M دائرية متغيرة بانتظام .

2-1- قيمة التسارع الزاوي :
يمثل التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ المعامل الموجه للمنحنى $\omega = f(t)$ نكتب معادلة المنحنى:

$$\omega = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$
$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{4 - 1}{4 - 0} = 0,75 \text{ rad.s}^{-1}$$

السرعة الزاوية عند اللحظة $t = 0$ مبيانيا تساوي:

$$\dot{\theta}_0 = 2 \text{ rad.s}^{-1}$$

- معادلة السرعة الزاوية :

$$2\omega = 0,75t + 2$$

1-2- المعادلة الزمنية لحركة النقطة M :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0t + \theta_0$$

$$\theta(t) = 0,375t^2 + 2$$

2-2- عدد الدورات المنجزة بين اللحظتين t_1 و t_2 :

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 2\pi n$$

$$2\pi n = [0,375 \times (5,2)^2 + 2 \times 5,2] - [0,375 \times 4^2 + 2 \times 4] = 6,54 \text{ rad}$$

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 1,04$$

3-2- التسارع المماسي والتسارع المنظمي:

$$a_t = r\ddot{\theta}$$

$$a_t = 0,1 \times 0,75 = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

$$a_n = r\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = 0,75 \times 2 + 2 = 3,5 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$a_n = 0,1 \times 3,5^2 = 1,225 \text{ m.s}^{-2}$$

منظم متجهة التسارع :

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a = \sqrt{3,5^2 + 1,225^2} = 1,23 \text{ m.s}^{-2}$$

3- مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = 6.10^{-2} \times 0,75 = 4,5.10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$$

تصحيح تمرين 2:

1- السرعة الزاوية البدئية :

$$\omega_0 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi N}{60}$$

ت.ع:

$$\omega_0 = \frac{2\pi \times 120}{60} = 12,6 \text{ rad.s}^{-1}$$

2- باعتبار المنحى الموجب للدوران و بما أن شدة القوة ثابتة ، فإن تعبير العزم يكتب :

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = -Fd$$

المسافة بين خط تأثير القوة $\vec{F}$ ومحور الدوران هي: $d = R$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = -FR$$

الأسطوانة تخضع لوزنها $\vec{P}$ و تأثير محور الدوران $\vec{R}$ و للقوة $\vec{F}$.
نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على الأسطوانة :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

بما أن خط تأثير كل من القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يمر من محور الدوران (Δ) ، فإن :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

$$0 + 0 - F.R = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{F.R}{J_{\Delta}}$$

3- تعبير السرعة الزاوية :

من خلال تعبير التسارع الزاوي يتبين أن $\ddot{\theta} = cte$ وبالتالي حركة الأسطوانة دورانية متغيرة (متباطئة) بانتظام .
معادلة السرعة الزاوية تكتب:

$$\omega = \ddot{\theta}t + \omega_0$$

$$\omega = -\frac{F.R}{J_{\Delta}}t + \omega_0$$

4- مدة الكبح:

عندما تتوقف الأسطوانة ، تنعدم سرعتها الزاوية :

$$0 = -\frac{F.R}{J_{\Delta}}t + \omega_0$$

$$\frac{F.R}{J_{\Delta}}t = \omega_0$$

$$t = \frac{J_{\Delta} \cdot \omega_0}{F.R}$$

$$t = \frac{m.R^2 \cdot \omega_0}{2F.R} = \frac{m.R \cdot \omega_0}{2F}$$

ت.ع:

$$t = \frac{100 \times 1.2}{2 \times 50} = 1,2s$$

تصحيح التمرين 3:

1-1- حسب مبيان الشكل (2) فإن المنحنى $\theta = f(t)$ عبارة عن دالة تآلفية معادلتها تكتب:

$$\theta(t) = \alpha t^2 + \beta$$

$$\alpha = \frac{\Delta\theta}{\Delta t^2} = \frac{12-2}{2-0} = 5 \text{ rad.s}^{-2} \text{ و } \beta = 2 \text{ rad}$$

المعادلة الزمنية تكتب:

$$\theta(t) = 5t^2 + 2$$

1-2- طبيعة حركة البكرة:

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ لدينا}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} (5t^2 + 2) \right] = \frac{d}{dt} (10t)$$

$$\ddot{\theta} = 10 \text{ rad.s}^{-2} = cte$$

نستنتج أن حركة البكرة (P) دورانية متغيرة بانتظام .

1-3- المعادلة الزمنية $z(t)$:

بما أن الخيط غير قابل للإمتداد ، فإن تسارع G مركز قصور الجسم (S) يكتب:

$$a = r\ddot{\theta} \text{ أي: } a = 0,1 \times 10 = 1 \text{ m.s}^{-2}$$

حركة G مستقيمة متغيرة بانتظام معادلتها تكتب :

$$z(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + z_0$$

حسب الشروط البدئية : $z_0 = 0$ و $v_0 = 0$ وبالتالي المعادلة الزمنية تكتب :

$$z(t) = 0,5t^2$$

2- يخضع الجسم (S) أثناء حركته الى القوى التالية :

$\vec{P}$ وزنه و $\vec{T}$ تأثير الخيط .

نعتبر المعلم $(O, \vec{k})$ غاليليا و نطبق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

نسقط العلاقة على المحور Oz :

$$mg - T = ma$$

$$T = m(a + g)$$

ت.ع:

$$T = 0,2 \times (10 - 1) = 1,8 \text{ N}$$

3- تخضع البكرة أثناء دورانها الى التأثيرات التالية :

$\vec{P}'$: وزنها .

$\vec{T}'$: تأثير الخيط .

$\vec{R}$: تأثير محور الدوران .

تأثير مزدوجة الإحتكاك عزمها M .

نطبق العلاقة الأساسية للحريك :

$$M_{\Delta}(\vec{P}') + M_{\Delta}(\vec{T}') + M_{\Delta}(\vec{R}) + M = J_{\Delta}\ddot{\theta} \quad (1)$$

باعتبار المنحى الموجب للدوران :

$M_{\Delta}(\vec{P}') = M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ لأن خط تأثير كل من القوتين $\vec{R}$ و $\vec{P}'$ يمر من محور الدوران (Δ) .

$$M_{\Delta}(\vec{T}') = T'r$$

العلاقة (1) تكتب:

$$0 + 0 + T'r + M = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

كتلة الخيط مهملة إذن : $T = T'$

$$M = J_{\Delta}\ddot{\theta} + Tr$$

ت.ع:

$$M = 10^{-2} \times 10 - 1,8 \times 0,1 = -8.10^{-2} \text{ N.m}$$

4- عدد الدورات المنجزة بين لحظة تقطع الخيط ولحظة توقف البكرة:

عندما يتقطع الخيط تصبح البكرة خاضعة لجميع التأثيرات السابقة باستثناء توتر الخيط. العلاقة الأساسية للديناميك تكتب :

$$M_{\Delta}(\vec{P}') + M_{\Delta}(\vec{R}) + M = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{J_{\Delta}} = \frac{-8.10^{-2}}{10^{-2}} = -8 \text{ rad.s}^{-2}$$

للبكرة حركة دورانية متغيرة بانتظام ،معادلتها الزمنية تكتب:

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

عند اللحظة t_1 يتقطع الخيط فتكون السرعة الزاوية للبكرة هي : $\dot{\theta}_0$

حسب السؤال الاول : $\theta(t) = 5t^2 + 2$

$$\dot{\theta}(t) = 10t$$

عند اللحظة $t_1 = 2s$ تكون السرعة الزاوية للبكرة :

$$\dot{\theta}(t_1) = 10 \times 2 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$$

وتمثل السرعة الزاوية البدئية للمرحلة الثانية .

حساب t_2 :

عند اللحظة t_2 تتوقف البكرة فتكون سرعتها منعدمة أي: $\dot{\theta}(t_2) = 0$

تكتب معادلة السرعة في المرحلة الأخيرة :

$$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta} t + \dot{\theta}_0 = -8t + 20$$

بما أن : $\dot{\theta}(t_2) = 0$ أي: $0 = -8t_2 + 20$

$$t_2 = \frac{20}{8} = 2,5s$$

نعلم أن:

$$\Delta\theta = \theta(t_2) - \theta_0 = 2\pi n$$

$$-\frac{1}{2} \times 8t_2^2 + 20t_2 = 2\pi n$$

$$n = \frac{-4 \times 2,5^2 + 20 \times 2,5}{2\pi} = 3,98 \approx 4$$

5- بعد تقطع الخيط يصبح الجسم (S) في سقوط حر، حيث يخضع للوزن فقط بعد إهمال تأثير الهواء.
القانون الثاني لنيوتن يكتب :

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

الإسقاط على المحور Oz :

$$ma = mg \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{g} = \mathbf{cte}$$

الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام :

$$z = \frac{1}{2} at^2 + V_0 t + z_0$$

السرعة البدئية للمرحلة الثانية تساوي السرعة عند اللحظة t_1 للمرحلة الأولى:

$$v(t_2) = r\dot{\theta}(t_1) = 0,1 \times 20 = 2 \text{ m.s}^{-1}$$

الأنسوب البدئي z_0 يمثل المسافة التي قطعها الجسم خلال المرحلة الأولى خلال المدة t_1 :

$$z(t_1) = 0,5t_1^2 = 0,5 \times 2^2 = 1 \text{ m}$$

المعادلة الزمنية للجسم (S) بعد اللحظة t_1 :

$$z(t) = 5t^2 + 2t + 1$$

تصحيح التمرين 4 :

1- معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta} = f(t)$:
 المنحنى الممثل للدالة $\dot{\theta} = f(t)$ عبارة عن دالة خطية معادلتها تكتب : $\dot{\theta} = \alpha t$

$$\alpha = \frac{\Delta \dot{\theta}}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{0,25 - 0} = 40 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\dot{\theta}(t) = 40t$$

2- طبيعة حركة (B):
 التسارع الزاوي للبكرة يكتب:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 40 \text{ rad.s}^{-2} = \text{cte}$$

حركة البكرة دورانية متغيرة بانتظام .
 3- تعبير n عدد دورات البكرة عند اللحظة t :
 المعادلة الزمنية للحركة الدوانية المتغيرة بانتظام تكتب:

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

لدينا : $\dot{\theta}_0 = \theta_0 = 0$

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \times 40t^2 = 20t^2$$

عدد الدورات المنجزة خلال المدة t :

$$\theta(t) = 2\pi n$$

$$n = \frac{\theta(t)}{2\pi} = \frac{20t^2}{2\pi}$$

ت.ع:

$$n = \frac{20 \times (1,25)^2}{2\pi} = 4,97 \simeq 5$$

4- طبيعة حركة كل من (S₁) و (S₂):

بنا أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة وغير مدود ، إذا كانت المسافة التي ينتقل بها الجسم (S₁) على (O, $\vec{i}$) هي x فإن المسافة التي ينتقل بها الجسم (S₂) على (O, $\vec{j}$) هي y والقوس الذي يدور به نقطة من مجرى البكرة هو s حيث: $s = x = y = r\theta$

$$\ddot{x} = \ddot{y} = r\ddot{\theta}$$

للجسمين (S₁) و (S₂) نفس التسارع : $a_1 = a_2 = r\ddot{\theta} = 0,04 \times 40 = 1,6 \text{ m.s}^{-2}$
 نستنتج أن حركة كل من (S₁) و (S₂) مستقيمة متغيرة بانتظام .

5- إثبات العلاقة: $a = \frac{(m_2 - m_1 \cdot k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_A}{r^2}}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على (S₁) :

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R}_1 = m_1 \vec{a}$$

الإسقاط على (O, $\vec{i}$) :

$$-f + T_1 = m_1 a$$

الإسقاط على $(O, \vec{j})$:

$$R_N - m_1 g = 0 \Rightarrow R_N = m_1 g$$

معامل الاحتكاك يكتب :

$$k = \tan \alpha = \frac{f}{R_N} \Rightarrow f = k \cdot R_N = m_1 g k$$

العلاقة (1) تكتب:

$$T_1 = k m_1 g + m_1 a$$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على (S_2) :

$$\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 a$$

الإسقاط على $(O, \vec{j})$:

$$T_2 - P_2 = m_2 a$$

$$T_2 = m_2 a - m_2 g$$

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك للدوران على البكرة (B):

$$M_{\Delta}(\vec{T}_1) + M_{\Delta}(\vec{T}_2) + M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

باعتبار المنحنى الموجب للدوران نكتب:

$$-T_1 r + T_2 r = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

لدينا : $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$

$$T_2 - T_1 = \frac{a \cdot J_{\Delta}}{r^2}$$

نعوض T_1 و T_2 بتعبيرهما :

$$m_2 a - m_2 g - (k m_1 g + m_1 a) = \frac{a \cdot J_{\Delta}}{r^2}$$

$$a \left(m_1 + m_2 + \frac{J_{\Delta}}{r^2} \right) = g(m_2 - k m_1)$$

نستنتج العلاقة:

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \cdot k) g}{m_1 + m_2 + \frac{J_{\Delta}}{r^2}}$$

لكي تتم حركة (S_1) يجب أن يكون التسارع موجبا أي:

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \cdot k) g}{m_1 + m_2 + \frac{J_{\Delta}}{r^2}} > 0$$

$$m_2 - m_1 \cdot k > 0$$

$$m_2 > m_1 \cdot k$$

$$m_2 > 0,16 \text{ kg}$$