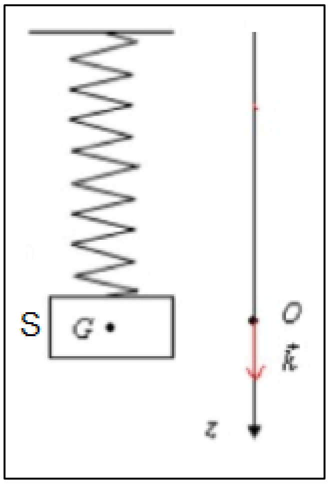
تمارين التذبذبات الميكانيكية

تمرين 1 :



نهمل جميع الأحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$.

نعتبر نواسا مرنا رأسيا مكونا من :

- نابض لفاته غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته K=40N/m مثبت بحامل .
- جسم صلب S كتلته m=100g ومركزه G مثبت بالطرف الحر للنابض .

1-أوجد تعبير إطالة النابض $\Delta\ell$ عند التوازن بدلالة m، g و K . أحسب $\Delta\ell$.

2-نزيح الجسم S رأسيا نحو الأسفل ، عن موضع توازنه المنطبق مع أصل معلم الفضاء Oz ، بمسافة Z_m =4cm ونحرره بدون سرعة بدئية عند لحظة نختارها كأصل التواريخ .

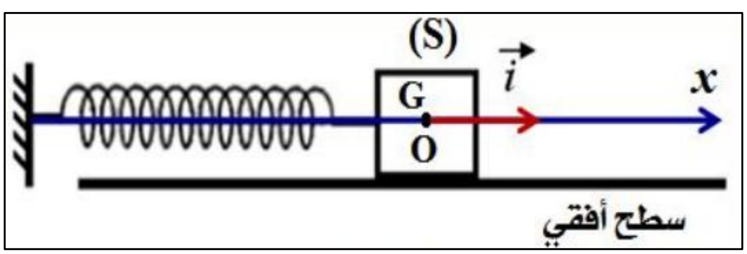
2-1-أوجد اعتمادا على الدراسة التحريكية المعادلة التفاضلية للحركة واستنتج طبيعتها .

2-2-أكتب المعادلة الزمنية للحركة $z = f(t)$.

2-3-بين أن سرعة الجسم S لحظة مروره لأول مرة من موضع توازنه لأول مرة تكتب : $V_1 = -Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$

3-ينفصل الجسم عن النابض لحظة مروره من موضع توازنه في منحى $\overrightarrow{\ }$. أوجد تعبير المعادلة الزمنية $z = f(t)$ لحركة S في المعلم Oz . نختار لحظة انفصال S عن النابض كأصل للتواريخ .

تمرين 2 :



نعتبر جسما صلبا S كتلته m=250 g يتحرك بدون احتكاك فوق سطح أفقي . نربط الجسم بنابض كتلته مهملة وصلابته K=10 N/m. نزيح الجسم عن موضع توازنه بالمسافة $X_m = 2\ cm$ ، ونحرره بدون سرعة بدئية . نختار معلما Ox حيث نمعلم G مركز القصور الجسم بالأفصول $OG = x$

1-بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S ، أوجد المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الجسم S

2-حل المعادلة التفاضلية هو : $x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

2-1-أوجد تعبير الدو الخاص T_0 للمتذبذب ، واحسب قيمته.

2-2-أوجد المعادلة الزمنية للحركة علما أن G يمر في اللحظة t=0 عن موضع توازنه O في المنحى الموجب.

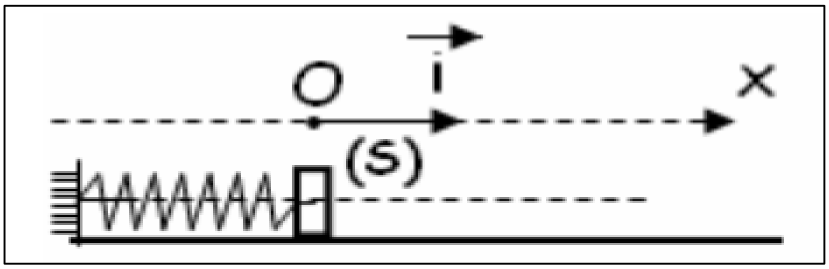
3-أوجد تعبير السرعة $V()$ عند اللحظة t . استنتج V_{max} السرعة القصوية لحركة الجسم S .

4-استنتج مميزات القوة $\vec{F}$ المطبقة من طرف النابض على الجسم S :

-عند مروره من موضع توازنه.

-عند $x = X_m$ و $x = -X_m$

<u>تمرين 3 :</u>



تحدث الزلازل اهتزازات أرضية تنتشر في جميع الاتجاهات يمكن تسجيلها بواسطة جهاز مسجل للهزات الأرضية .يؤدي هذا الجهاز وظيفته وفق مبدأ المتذبذب (جسم صلب + نابض) الذي يكون أفقيا أو رأسيا . فيما يلي نهتم بدراسة النواس المرن الأفقي. يتكون من جسم صلب كتلته $m = 92g$ ونابض صلابته K

ندرس الحركة في مرجع أرضي ، نقرنه بالمعلم $(O, \vec{i})$ عند التوازن يكون أفصول G مركز قصور الجسم منعدما .
نزيح الجسم أفقيا عن موضع توازنه في المنحى الموجب بالمسافة $X_0 = 4cm$ ثم نحرره بدون سرعة بدئية في اللحظة $t = 0$

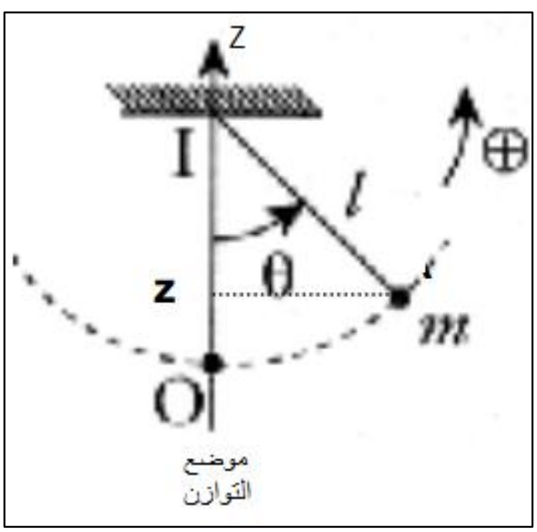
1-بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها الأفصول x لمركز قصور الجسم و استنتج طبيعة الحركة.

2-أحسب صلابة النابض علما أن الدور الخاص للمجموعة المتذبذبة يساوي $_0 = 0,6\ s$.

3-أكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ للحركة .

4-حدد منحى وشدة قوة الإرتداد المطبقة من طرف النابض على الجسم (S) عند اللحظة $t = 0,3\ s$.

<u>تمرين 4: لمسلك العلوم الفيزيائية</u>



نعتبر نواس بسيط طوله ℓ وكتلته m نمعلم النواس بأفصوله الزاوي θ بحيث $\theta = 0$ عند موضع التوازن المستقر . نهمل جميع الإحتكاكات .

1-أنقل الشكل ومثل عليه متجهات القوى المطبقة على الكتلة m .

2-بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكتلة m واستعمال معلم فريني أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها الأفصول الزاوي θ .

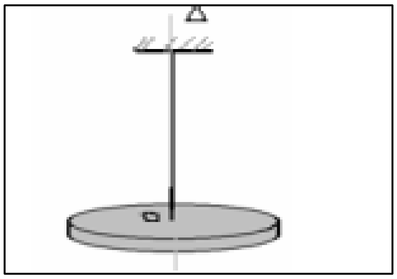
3-كيف تصبح هذه المعادلة في حالة الوسع الضعيف ؟

4-بين أن المعادلة $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2}{T_0}t + \varphi\right)$ حل للمعادلة التفاضلية السابقة محددا تعبير T_0 بدلالة ℓ و g .

5- باستعمال معادلة الأبعاد بين أن ل $_0$ بعد زمني .

تمرين 5: لمسلك العلوم الفيزيائية

قرص متجانس شعاعه $r = 10\ cm$ ، كتلته $m = 200\ g$ مثبت من مركزه O بواسطة سلك فلزي رأسي قابل للي ، كما يبين الشكل التالي:



عندما نزيح القرص عن موضع توازنه بحيث يصبح ملتويا ، ثم نحرره ، فيأخذ حركة دورانية تذبذبية حول المحور (Δ) ، حيث مدة 15 ذبذبة تساوي : $17,2\ s$. عزم قصور القرص بالنسبة للمحور (Δ) هو : $J_\Delta = \frac{1}{2}mr^2$.

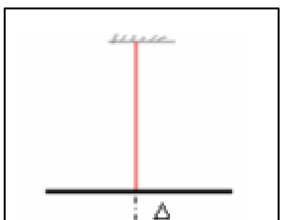
1-أثبت المعادلة التفاضلية للحركة ، ثم أوجد ثابتة اللي C للسلك المدروس.

2-القرص في موضع توازنه .نديره باليد ، بحيث ينجز نصف دورة في المنحى المباشر (الذي نعتبره المنحى الموجب) حول المحور (Δ) ، ثم نحرره بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t = 0$.

3-أوجد المعادلة الزمنية للحركة.

4-اعط الطاقة الميكانيكية لهذا المتذبذب الميكانيكي ،ثم احسب قيمتها في لحظة تحريره بعد إدارته بنصف دورة . باعتبار كحالة مرجعية $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$.

تمرين 6:لمسلك العلوم الفيزيائية

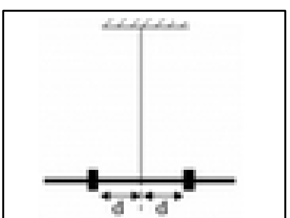

شكل1

يمثل الشكل التالي سلكا فولاذيا رأسيا ، ثابتة ليه C ، مثبت من طرفه السفلي بمركز قصوره قضيب متجانس عزم قصوره بالنسبة لمحو الدوران J_Δ شكل 1 .

ندير القضيب أفقيا بزاوية θ_m ثم نحرره بدون سرعة بدئية ، فتصبح له حركة تذبذبية .

1-أوجد المعادلة التفاضلية للحركة ثم اعط تعبير نبضها الخاص بدلالة J_0 و C . ثم اعط تعبير الدور الخاص T_0 .

نثبت على القضيب سمحتين لهما نفس الكتلة $m = m_1 = m_2 = 0,35\ kg$ كل منهما توجد على مسافة d من النقطة O .


شكل 2

ندير القضيب أفقيا حول المحور Δ فيلتوي السلك بزاوية θ_m ، ثم نحرره بدون سرعة بدئية .

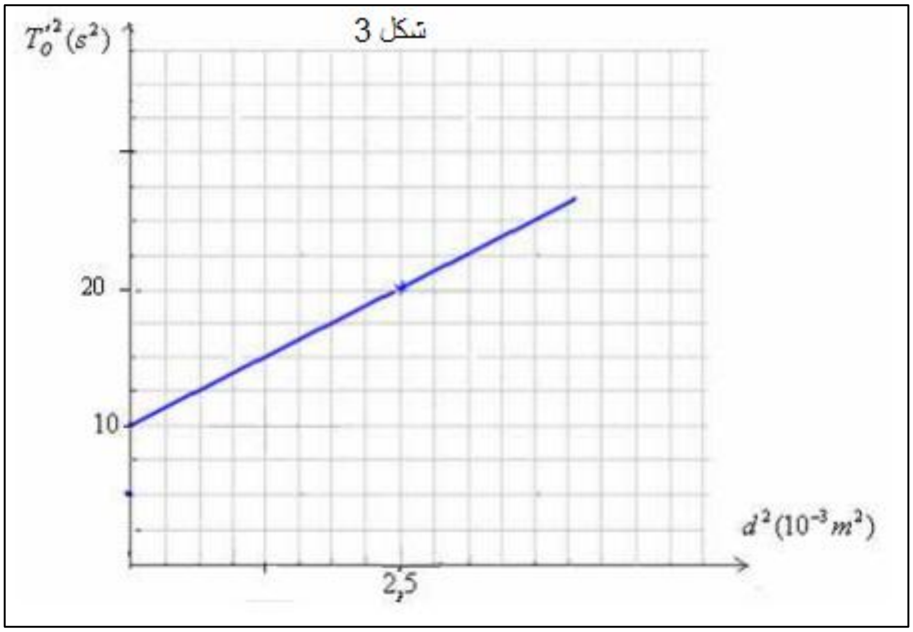
عزم قصور المجموعة (قضيب + السحمتين) هو $J_\Delta = J_0 + 2md^2$ (أنظر شكل2).

نقيس تغيرات الدور الخاص T_0 للمجموعة بتغير موضع السحمتين .

فنحصل على المنحنى الممثل للدالة $T'^2_0 = f(d^2)$ في الشكل 3 .

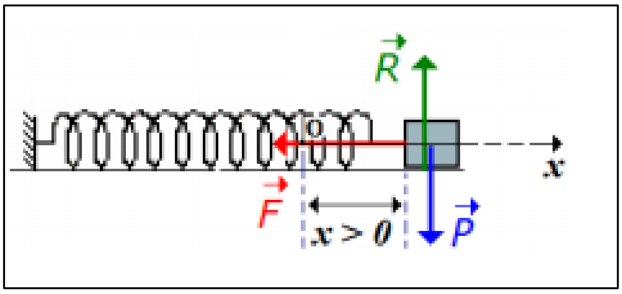
2-أوجد الدور الخاص T'_0 للمجموعة (قضيب +سحمتين) بدلالة J_0 ، m ، C و d .

3-أوجد C و J_0


شكل 3
$T_O'^2 (s^2)$
20
10
2,5
$d^2 (10^{-3} m^2)$

تصحيح تمارين التذبذبات الميكانيكية

تصحيح تمرين 1:



1-المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الجسم S :

القوى المطبقة على الجسم S خلال حركته :

-وزن الجسم : $\vec{P}$.

-تأثير النابض : $\vec{F}$.

-تأثير السطح الأفقي : $\vec{R}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن ، نكتب:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحور Ox :

$$-F + 0 + 0 = ma_x$$

المعادلة التفاضلية للحركة $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \Leftarrow -Kx = m\ddot{x}$

2-1-إثبات الدور الخاص T_0:

لدينا : $x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m\, cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \Leftarrow \dot{x} = -\frac{2\pi}{T_0}X_m\, sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

نعوض x و $\ddot{x}$ في المعادلة التفاضلية :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m\, cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + \frac{K}{m}X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)\right) = 0$$

$$X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)\right)\left[-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{K}{m}\right] = 0$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{K}{m} = 0\ \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} \Leftarrow$$

نستنتج : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ت.ع: ت.ع: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{025}{10}} = 0,99s \approx 1s$

2-2-المعادلة الزمنية للحركة :

حسب الشروط البدئية:

عند t=0 لدينا: $x = 0$ و $\dot{x} > 0$

$x(0) = X_m cos\varphi = 0$ أي: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ أو $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\dot{x}(0) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{T_0}X_m > 0$$

وبالتالي : $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

المعادلة الزمنية تكتب :

$$x(t) = 2.10^{-2}cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

3-تعبير السرعة عند اللحظة t:

$$\dot{x}(t) = -0,126 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \Leftarrow \dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

4- تعبير قوة الإرتداد هو :

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

-عند موضع التوازن x=0 تكون F=0 .

-عند ما تكون $x = X_m$ يكون للقوة $\vec{F}$ والمتجهة $\vec{i}$ منحيان متعاكسان ونفس الإتجاه .

شدة القوة: $F = Kx_m = 10 \times 0,02 = 0.2N$

-عند ما تكون $x = -X_m$ يكون للقوة $\vec{F}$ و $\vec{i}$ نفس الاتجاه ومنحيان متعاكسان .

شدة القوة : $F = 0,2\ N$

تصحيح التمرين 2:

1-أيجاد تعبير إطالة $\Delta\ell$ عند التوازن :

المجموعة المدروسة : $\{$الجسم $S\}$

جرد القوى :

يخضع الجسم S عند التوازن للقوى التالية :

$\vec{P}$: وزن الجسم .

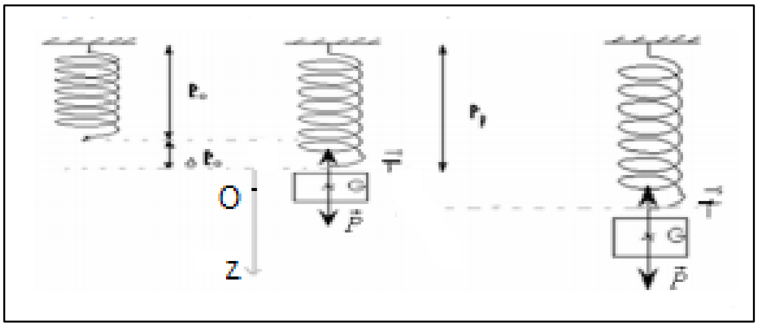
$\vec{T_0}$: توتر النابض .

حسب شرط التوازن لدينا : $T_0 = P$

$$K\Delta\ell = mg$$

إطالة النابض عند التوازن هي :

$$\Delta\ell = \frac{mg}{k} = \frac{0,2 \times 10}{20} = 0,1m$$



1-2-المعادلة التفاضلية للحركة:

أثناء الحركة يخضع الجسم S للقوى التالية :

$\vec{P}$: وزن الجسم .

$\vec{T}$: توتر النابض .

القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحور Oz:

$$P-T=ma_z$$
$$mg-K(\Delta\ell+z)=m\ddot{z}$$
$$mg-K\Delta\ell-Kz=m\ddot{z}$$

حسب شرط التوازن :

$$K\Delta\ell=mg$$

نكتب: $-Kz=m\ddot{z}$

$$\ddot{z}+\frac{K}{m}z=0$$

المعادلة التفاضلية لحركة النواس المرن الرأسي خطية وبالتالي حلها جيبي ومنه الحركة تذبذبية جيبية.

2-2-المعادلة الزمنية للحركة :

حل المعادلة الزمنية يكتب :

$$z(t)=Z_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

حسب الشروط البدئيةلدينا عند $t=0$: $z(0)=Z_m=4cm$

المعادلة التفاضلية تكتب:

$$z(0)=Z_m cos(\varphi)=Z_m$$

$$\varphi=0\Leftarrow cos\varphi=1$$

لدينا :

$$\frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{40}{0,1}}=20\,rad.s^{-1}$$

المعادلة التفاضلية تكتب:

$$z(t)=4.10^{-2}cos(20t)$$

2-3-نبين تعبير السرعة:

لنحسب تعبير السرعة :

$$\dot{z}=\frac{dz}{dt}=-\frac{2\pi}{T_0}z_m\,sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

عندما يمر الجسم من موضع التوازن لأول مرة في المنحنى السالب تكون سرعته سالبة وبالتالي نكتب:

$sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)=1$ كما أن : $\frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{K}{m}}$

$$\dot{z}(0)=V_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$$

ت.ع: $V_1=-0,04\times\sqrt{\frac{40}{0,1}}=-0\,,8\,m.s^{-1}$

3- المعادلة الزمنية :

بعد انفصاله عن النابض يخضع الجسم لوزنه فقط .

القانون الثاني لنيوتن يكتب : $\vec{P}=m\vec{a}$

$\vec{a} = \vec{g}$: ومنه $m\vec{a} = m\vec{g}$
الإسقاط على المحور Oz :

$$a = g = cte$$

المعادلة الزمنية تكتب :

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t + z_0$$

لدينا : $g = 10\ m.s^{-2}$ و $V_0 = 0,8\ m.s^{-1}$ و $z_0 = 0$

$$z(t) = \frac{1}{2} \times 10t^2 + 0,8tz(t) = 5t^2 + 0,8t \Leftarrow$$

تصحيح تمرين 3 :

1-المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الجسم S :
القوى المطبقة على الجسم S خلال حركته :
-وزن الجسم : $\vec{P}$.
-تأثير النابض : $\vec{F}$.
-تأثير السطح الأفقي : $\vec{R}$
نطبق القانون الثاني لنيوتن ، نكتب:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحور Ox :

$$-F + 0 + 0 = ma_x$$

$-Kx = m\ddot{x} \Leftarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ المعادلة التفاضلية للحركة

2-صلابة النابض K :
المعادلة التفاضلية تكتب : $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$
حيث ω_0 النبض الخاص : $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ أي: $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$
نعلم أن : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ومنه : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$
وبالتالي :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

تعبير الدور الخاص :

$$T_0^2 = 4\pi^2\frac{m}{K}$$

نستنتج :

$$K = 4\pi^2\frac{m}{T_0^2}$$

ت.ع:

$$k = 4\pi^2\frac{92.10^{-3}}{0,6^2} = 10N.m^{-1}$$

3-المعادلة الزمنية :

المعادلة التفاضلية خطية حلها جيبي ، يكتب على الشكل :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

حسب الشروط البدئية :

عند $t = 0$ لدينا :

$$\begin{cases} X_0 = 4cm > 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{cases}$$

لدينا : $x(0) = X_m cos\varphi > 0$ أي: $cos\varphi > 0$

تعبير السرعة :

$$\dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m\, sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$x(0) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m\, sin\varphi = 0$$

أي أن : $sin\varphi = 0$ ومنه فإن : $\varphi = 0$ أو $\varphi = \pi$

بما أن : $cos0 > 0$ فإن: $\varphi = 0$ و $X_m = 4cm$

لدينا : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0,6} = \frac{10\pi}{3}$

نستنتج المعادلة الزمنية :

$$x(t) = 4.10^{-2} cos\frac{10\pi}{3}t$$

4-مميزات قوة الإرتداد عند اللحظة $t = 0,3s$:

متجهة قوة الإرتداد في كل لحظة :

$$\vec{F} = -Kx(t)\vec{i}$$

عند اللحظة $t = 0,3s$ أفصول مركز قصور الجسم (S) هو :

$$x(t = 0,3) = 4.10^{-2}cos\frac{10\pi}{3} \times 0,3 = -4.10^{-2}m$$

$$\vec{F} = -Kx(t = 0,3)\vec{i} = -10 \times (-4.10^{-2})\vec{i} = 0,4\,\vec{i}$$

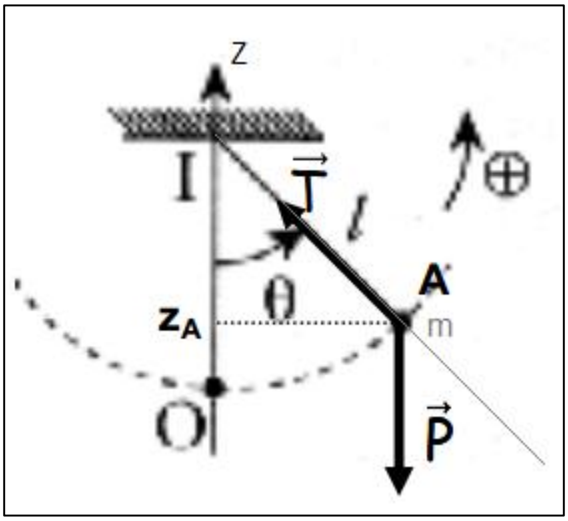
متجهة القوة $\vec{F}$ تكتب :

$$\vec{F} = F_x\vec{i}$$

حيث F_x إحداثي قوة الإرتداد وقمته موجبة: $F_x = 0,4\ N > 0$

نستنتج : أن عند اللحظة $t = 0,3s$ أتجاه و منحى $\vec{F}$ هو نفس اتجاه و منحى $\vec{i}$ (أي في المنحى الموجب) وشدتها : $F = 0,4N$.

تصحيح التمرين 4:



. m

1-تمثيل القوى :

تخضع الكتلة $\boldsymbol{m}$ لقوتين :

$\vec{P}$: وزنها .

$\vec{T}$: تأثير الخيط .

2-المعادلة التفاضلية :

تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

نعتبر معلم فريني $(A\,, \vec{u}, \vec{n})$ حيث A موضع الكتلة

الإسقاط على المحور $(A, \vec{u})$:

$$-mg\sin\theta + 0 = ma_T$$

التسارع المماسي : $a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\ell\dot{\theta})}{dt} = \ell\frac{d\dot{\theta}}{dt}$

أي: $a_T = \ell\ddot{\theta}$

$$-mg\sin\theta = m\ell\ddot{\theta}$$

نستنتج :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

المعادلة التفاضلية وهي غير خطية .

3-حالة التذبذبات الصغيرة :

عندما تكون θ صغيرة نكتب : $\sin\theta \approx \theta$ المعادلة التفاضلية تصبح:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

4-حل المعادلة التفاضلية:

يكتب الحل على الشكل التالي :

$$\theta(t) = \theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

بالإشتقاق نحصل :

$$\theta(\dot{t}) = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}\theta(t)$$

نعوض في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2}\theta + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

$$\theta\left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{g}{\ell}\right) = 0$$

لتتحقق هذه المعادلة مهما تكن t يجب أن يكون :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{g}{\ell} = 0$$

$$\frac{T_0^2}{4\pi^2} = \frac{\ell}{g}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

5-استعمال معادلة الأبعاد نبين أن للدور الخاص T_0 بعد زمني :

لدينا:

$[\ell] = L$ و $[g] = L.T^{-2}$ لأن g متجانسة مع التسارع .

و $[\pi] = 1$ لأن π نعبر عنها ب rad التي ليس لها بعد في الفيزياء .

$$[T_0] = \frac{L^{1/2}}{[g]^{1/2}} = \frac{L^{1/2}}{L^{1/2}.T^{-2\times1/2}} = \frac{1}{T^{-1}}$$

نستنتج:

$$[T_0] = T$$

نستنتج أن وحدة T_0 هي الثانية .

تصحيح التمرين 5:

1-إثبات المعادلة الزمنية للحركة :

يخضع القرص للقوى التالية:

$\vec{P}$: وزن القرص.

$\vec{R}$: تأثير السلك.

مزدوجة اللي عزمها M_c.

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_c = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$M_\Delta(\vec{P}) = M_\Delta(\vec{R}) = 0$ لأن خطا تأثير القوتين يمران من محو الدوران .

$$0 + 0 - C\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$$

وبالتالي:

$$J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta = 0$$

$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$ المعادلة التفاضلية لنواس اللي .

النبض الخاص :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

الدور الخاص:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_\Delta}{C}$$
$$C = \frac{4\pi^2 . J_\Delta}{T_0^2}$$

مع : $J_\Delta = \frac{1}{2}mr^2$ و $\Delta t = 15T_0$ أي: $T_0 = \frac{\Delta t}{15}$

$$C = \frac{4\pi^2 . \frac{1}{2}mr^2}{\left(\frac{\Delta t}{15}\right)^2} = \frac{2\pi^2 \times 0,2 \times 0,1^2}{\left(\frac{17,2}{15}\right)^2} = 3.10^{-2} N.m.rad^{-1}$$

2- المعادلة التفاضلية خطية حلها جيبي يكتب على الشكل:

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

حيث : $\theta_m = \pi\, rad$ وسع الحركة

والنبض الخاص : $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} = \sqrt{\frac{C}{\frac{1}{2}mr^2}} = \sqrt{\frac{0,03}{\frac{1}{2}\times 0,2\times 0,1^2}} = 5,48\, rad.s^{-1}$

الطور عند أصل التواريخ :

عند اللحظة $t = 0$ يكون $\theta = \pi$

$$\theta(t=0) = \theta_m cos\varphi = \theta_m$$

$cos\varphi = 1$ أي: $\varphi = 0$

المعادلة الزمنية تكتب:

$$\theta(t) = \pi \cos(5,48t)$$

3-الطاقة الميكانيكية للقرص :

باعتبار المستوى الأفقي المار من G مركز قصور القرص مرجعا لطاقة الوضع الثقالية $E_{pp} = 0$

فالطاقة الميكانيكية تساوي مجموع الطاقة الحركية و طاقة وضع اللي:

$$E_m = E_c + E_{pp}$$

باعتبار الحالة المرجعية لطاقة وضع اللي $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ نكتب:

$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta . \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C . \theta^2$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $\theta = \pi$ و $\dot{\theta} = 0$ الطاقة الميكانيكية تكتب:

$$E_m = \frac{1}{2} C . \theta_m^2 = \frac{1}{2} \times 0.03 \times \pi^2 = 0,148\, J$$

تصحيح تمرين 6:

1-المعادلة التفاضلية :

يخضع القضيب أثناء حركته:

لوزنه $\vec{P}$ وتأثير السلك $\vec{T}$ و تأثير مزدوجة اللي ذات العزم : $M_c = -C\theta$.

العلاقة الأساسية للديناميك : $\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_0 \ddot{\theta}$

:

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_c = J_0\ddot{\theta}$$

$M_\Delta(\vec{P}) = M_\Delta(\vec{R}) = 0$ لأن خطا تأثير القوتين يمران من محو الدوران .

$$0 + 0 - C\theta = J_0\ddot{\theta}$$

وبالتالي:

$$J_0\,\ddot{\theta} + C\theta = 0$$

$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_0}\theta = 0$ المعادلة التفاضلية لنواس اللي .

النبض الخاص :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_0}}$$

الدور الخاص:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{C}}$$

2-تعبير الدور الخاص للمجموعة المتذبذبة بعد إضافة السحمتين هو:

الدور الخاص:

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

مع : $J_\Delta = J_0 + 2md^2$

وبالتالي الدور الخاص:

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + 2md^2}{C}}$$

3-تحديد قيمة كل من C و J_0 :

لدينا:

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + 2md^2}{C}} \Leftarrow T'^2_0 = \frac{4\pi^2.J_0}{C} + \frac{8\pi^2.m}{C}d^2$$

المنحنى $T'^2_0 = f(d^2)$ عبارة عن دالة تآلفية معادلتها تكتب :

$$T'^2_0 = A.d^2 + B$$

حيث A تمثل المعامل الموجه للمستقيم نكتب:

$$A = \frac{\Delta T'^2_0}{\Delta d^2} = \frac{(20-10)s^2}{(2,5.10^{-3}-0)m^2} = 4.10^3\ s^2.m^{-2}$$

و $B = T'^2_0$ عندما تكون $d^2 = 0$

مبيانيا نجد : $B = 10\ m^2$

معادلة المنحنى تكتب :

$$T'_0{}^2 = 4.10^3 d^2 + 10$$

بمقارنة المعادلتين الملونتين نجد:

$C = \frac{8\pi^2 m}{4.10^3} \Leftarrow 4.10^3 = \frac{8\pi^2 m}{C}$ ت.ع: $C = \frac{8\pi^2 \times 0,35}{4.10^3} = 2.10^{-3} N.m.rad^{-1}$

$J_0 = \frac{10C}{\pi^2} \Leftarrow 10 = \frac{4\pi^2 J_0}{C}$ ت.ع: $J_0 = \frac{10\times 2.10^{-3}}{\pi^2} = 5.10^{-4}\ kg.m^2$