

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$

أحسب : $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(1) احسب $g'(x)$ لكل $x \in]-1; +\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات g
 (2) استنتج إشارة g على $]-1; +\infty[$

(II) أ) بين أن : $\forall x \in [0; +\infty[\quad 0 \leq x - \operatorname{Arctan} x \leq \frac{1}{3}x^3$

ب) استنتج حساب النهاية : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2}$

(III) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-2}{f} x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 2 & ; x > -1 \\ f(x) = -\sqrt[3]{-x^3 - x^2} + 1 & ; x \leq -1 \end{cases}$$

وليكن (Cf) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

(1) بين أن $Df = \mathbb{R}$

(2) بين أن f متصلة على \mathbb{R}

(3) بين أن f قابلة للاشتقاق يمين -1 و أن : $f'_d(-1) = 2 + \frac{2}{f}$ (استعمل الخاصية : $\forall t > 0 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{f}{2} - \operatorname{Arctan}(t)$)

(4) أدرس قابلية اشتقاق f يسار -1 و أول النتيجة المحصل عليها هندسيا.

(5) بين أن (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = \frac{-2}{f}x + \frac{2}{f} + 2$ جوار (Δ_1) : $+\infty$ (يمكنك وضع : $t = \frac{1}{x+1}$)

(6) بين أن (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = x + \frac{4}{3}$ جوار (Δ_2) : $-\infty$

(7) تحقق أن : $\forall x \in]-1; +\infty[\quad [f'(x) = \frac{-2x}{f} g(x)]$ و $\forall x \in]-\infty; -1[\quad [f'(x) = \frac{x(3x+2)}{3(\sqrt[3]{-x^3 - x^2})^2}]$

(8) أوجد جدول تغيرات الدالة f

(9) أنشئ (Cf) (نقبل أن (Cf) يقطع محور الأفاصيل في نقطتين أفصولهما $r \approx 4$ و $s \approx -1,5$)

تمرين 2 : لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(1) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq 1$

(2) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفين بما يلي : $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$
 أ) بين بالترجع أن (v_n) تزايدية و أن (w_n) تناقصية.

ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |v_{n+1} - w_{n+1}| \leq \frac{1}{4}|v_n - w_n|$

ج) بين أن (v_n) و (w_n) متحاذيتان

د) استنتج أن (u_n) متقاربة محددنا نهايتها.

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

$$\forall x \in]-1; +\infty[\quad g(x) = 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 \times 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) = 2 \times \frac{f}{2} - \frac{-1}{1} = f + 1$$

1

لدينا لكل : $\forall x \in]-1; +\infty[$

$$g'(x) = 2 \frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)'}{1 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2} - \frac{x^2 + 2x + 2 - x(2x+2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} = 2 \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{x^2 + 2x + 2 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2 + 1} - \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2(x^2 + 2x + 2) - 2 + x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 - 4x - 4 - 2 + x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-(x^2 + 4x + 6)}{(x^2 + 2x + 2)^2} < 0$$

(لأن : $\Delta = 16 - 24 < 0$)
منه:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$f+1$	0

(I)

2

3 حسب جدول التغيرات نستنتج أن : $\forall x \in]-1; +\infty[\quad g(x) > 0$ (لأن : $g(-1; +\infty) =]0, f+1[$)

$$\text{نعتبر الدالتين : } p(x) = x - \operatorname{Arctan} x \quad \text{و} \quad q(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{Arctan} x$$

الدالتان قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R} .

$$\text{ولدينا : } \forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} \geq 0 \quad \text{و}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad q(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^4}{x^2 + 1} \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [0; +\infty[\quad p(x) \geq 0 \\ \forall x \in [0; +\infty[\quad q(x) \geq 0 \end{array} \right. \geq 0 \quad \text{منه} \quad x \geq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p(x) \geq p(0) \\ q(x) \geq q(0) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \end{array} \right. : \text{إذن فهما تزايديتان منه}$$

$$\text{و هذا يعني : } \forall x \in [0; +\infty[\quad 0 \leq x - \operatorname{Arctan} x \leq \frac{1}{3}x^3$$

مبرهنة التزايديات المنتهية غير مفيدة في هذه الحالة بسبب عدم نجاعة التأطير بعد حساب المشتقة.

$$\text{بما أن : } \forall x > 0 \quad 0 \leq \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2} \leq \frac{1}{3}x \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}x = 0 \quad \text{فإن : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2} = 0$$

2

(II)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-2}{f} x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 2 & ; x > -1 \\ f(x) = -\sqrt[3]{-x^3 - x^2} + 1 & ; x \leq -1 \end{cases}$$

$$Df = \{x \in]-1; +\infty[/ x+1 \neq 0\} \cup \{x \in]-\infty; -1] / -x^3 - x^2 \geq 0\}$$

$$Df =]-1; +\infty[\cup \{x \in]-\infty; -1] / -x^2(x+1) \geq 0\}$$

$$Df =]-1; +\infty[\cup \{x \in]-\infty; -1] / (x+1) \leq 0\}$$

$$Df =]-1; +\infty[\cup]-\infty; -1]$$

$$Df = \mathbb{R}$$

1 لدينا :

لدينا الدالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ متصلة على $] -1; +\infty[$ و $h(]-1; +\infty[) \subset \mathbb{R}$ و الدالة $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ متصلة على

\mathbb{R} إذن الدالة $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)$ متصلة على $] -1; +\infty[$ ، ولدينا أيضا الدالة $x \mapsto \frac{-2}{f} x^2$ متصلة على

$] -1; +\infty[$ إذن f متصلة على $] -1; +\infty[$

ولدينا الدالة الحدودية $s: x \mapsto -x^3 - x^2$ متصلة على \mathbb{R} و $s(]-\infty; -1]) \subset [0; +\infty[$ و الدالة $x \mapsto -\sqrt[3]{x}$

متصلة على $[0; +\infty[$ إذن $x \mapsto -\sqrt[3]{x^3 - x^2}$ متصلة على $] -\infty; -1]$ ، إذن f متصلة على $] -\infty; -1]$

2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{-2}{f} x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 2 = \frac{-2}{f} \times 1 \times \frac{f}{2} + 2 = -1 + 2 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = f(-1) : \text{منه } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} -\sqrt[3]{-x^3 - x^2} + 1 = 1$$

بالتالي f متصلة على \mathbb{R}

III

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{\frac{-2}{f} x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{\frac{-2}{f} x^2 \left(\frac{f}{2} - \operatorname{Arctan}(x+1)\right) + 1}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{-x^2 + \frac{2}{f} \operatorname{Arctan}(x+1) + 1}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1-x^2}{x+1} + \frac{\frac{2}{f} \operatorname{Arctan}(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1-x + \frac{2}{f} \frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{x+1} = 1 - (-1) + \frac{2}{f} \times 1 = 2 + \frac{2}{f}$$

بالتالي f قابلة للاشتقاق يمين -1 و لدينا : $f'_d(-1) = 2 + \frac{2}{f}$

3 لدينا :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{-\sqrt[3]{-x^3 - x^2}}{x+1} = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} \frac{-\sqrt[3]{t^3 - t^2}}{-t+1} = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} \frac{\sqrt[3]{t^2(t-1)}}{t-1} = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} \sqrt[3]{\frac{t^2}{(t-1)^2}} = +\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق يسار -1 ، لكن (Cf) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة ذات الأضلاع -1 .

4

وضعنا $t = -x$ تفاديا لأخطاء الإشارة داخل الجذر مكعب.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \frac{2}{f}x - \frac{2}{f} - 2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{f}x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 2 + \frac{2}{f}x - \frac{2}{f} - 2 \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f}x \left(-x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1 \right) - \frac{2}{f} \\
&= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{2}{f} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) \left(\left(1 - \frac{1}{t} \right) \operatorname{Arctan}(t) + 1 \right) - \frac{2}{f} \\
&= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{2}{f} \left(\frac{1-t}{t} \right) \left(\operatorname{Arctan}(t) + \frac{t - \operatorname{Arctan}(t)}{t} \right) - \frac{2}{f} \\
&= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{2}{f} (1-t) \left(\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} + \frac{t - \operatorname{Arctan}(t)}{t^2} \right) - \frac{2}{f}
\end{aligned}$$

لدينا :

5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \frac{2}{f}x - \frac{2}{f} - 2 = \frac{2}{f} \times (1-0)(1+0) - \frac{2}{f} = 0$$

بالتالي: (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = \frac{-2}{f}x + \frac{2}{f} + 2$ جوار (Δ_1) جوار $+\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt[3]{-x^3 - x^2} + 1 - x - \frac{4}{3} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\sqrt[3]{t^3 - t^2} + t - \frac{1}{3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t - \sqrt[3]{t^3 - t^2} - \frac{1}{3} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 - (t^3 - t^2)}{t^2 + t\sqrt[3]{t^3 - t^2} + (\sqrt[3]{t^3 - t^2})^2} - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt[3]{-x^3 - x^2} + 1 - x - \frac{4}{3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^2 \left[1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{t}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{t}} \right)^2 \right]} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

إذن: (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = x + \frac{4}{3}$ جوار (Δ_2) جوار $-\infty$

6

$$f'(x) = \frac{-2}{f} \left(2x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + x^2 \frac{\frac{-1}{(x+1)^2}}{1 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{-2}{f} \left(2x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + x^2 \frac{-1}{1 + (x+1)^2} \right) \quad \text{لدينا لكل } x > -1$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{f} \left(2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x}{1 + (x+1)^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{f} g(x)$$

$$f'(x) = \left(-(-x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{-1}{3} (-x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}-1} \times (-x^3 - x^2)' = \frac{x(3x+2)}{3(\sqrt[3]{-x^3 - x^2})^2} \quad \text{و لكل } x < -1$$

7

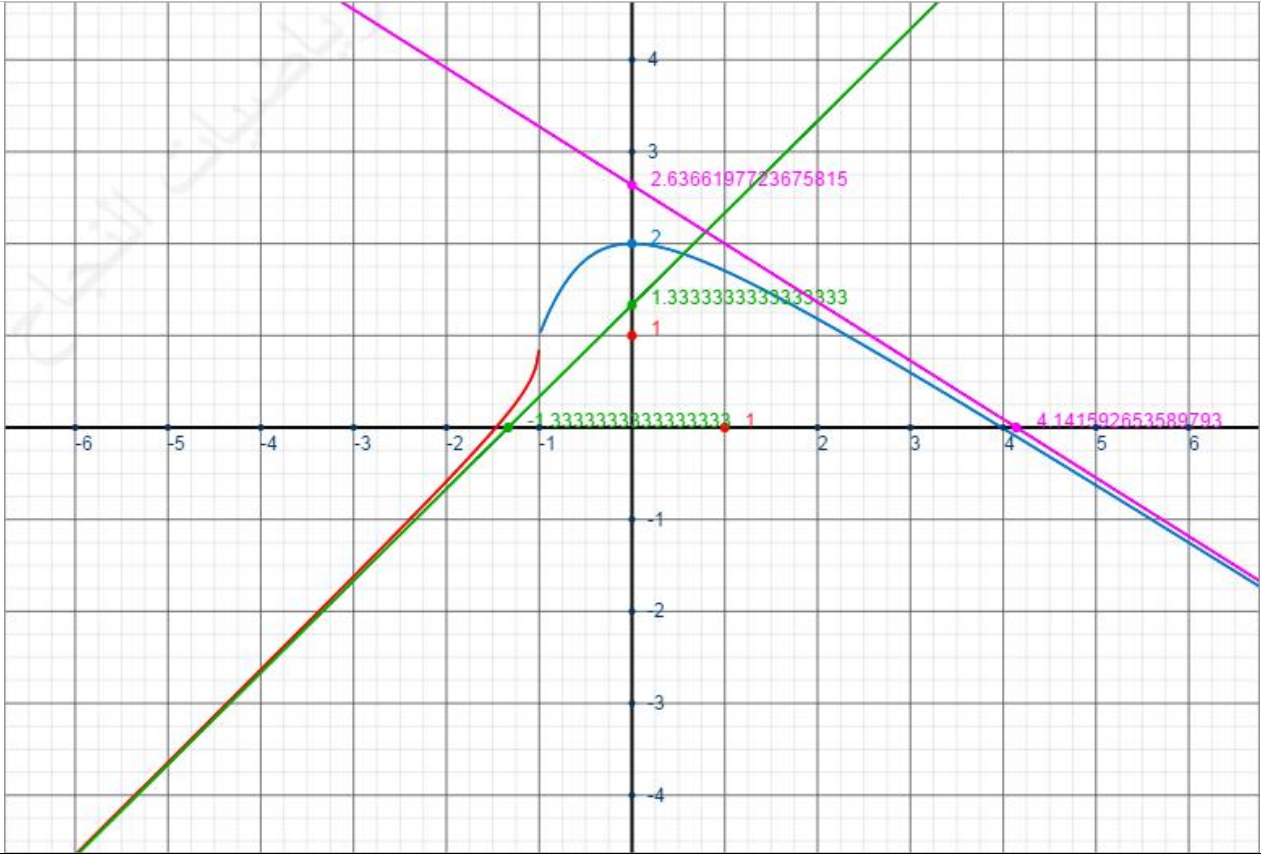
بما أن: $g(x) > 0 \quad \forall x > -1$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة x على $]-1; +\infty[$

$$x < -1 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3x + 2 < -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x(3x+2) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$$

منه:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	↗ 1		↘ 1	↗ $+\infty$

8



9

تمرين 2: $u_0 = 1$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

بالنسبة لـ $n = 0$ لدينا $u_0 \geq 1$

نفترض أن $u_n \geq 1$ و نبين أن $u_{n+1} \geq 1$

لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq 1$ ، بالتالي بالنسبة بين أن: $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{u_n} > 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$

$$v_n = u_{2n} \quad \text{و} \quad w_n = u_{2n+1}$$

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ و الدالة: $g(x) = f \circ f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$

لدينا: $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(w_n)$ و $w_n = u_{2n+1} = f(u_{2n}) = f(v_n)$

منه: $v_{n+1} = f(w_n) = f(f(v_n)) = g(v_n)$ و $w_{n+1} = f(v_{n+1}) = f(f(w_n)) = g(w_n)$

من جهة أخرى لدينا: $\forall (x, y) \in]0; +\infty[\quad x > y \Rightarrow x+1 > y+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{y+1} \Rightarrow \frac{-1}{x+1} > \frac{-1}{y+1} \Rightarrow g(x) < g(y)$

إذن g تزايدية على $]0; +\infty[$

1

2

الآن لدينا : $w_0 = u_1 = 2$ و $v_0 = u_0 = 1$ و $w_1 = u_3 = \frac{5}{3}$ و $v_1 = u_2 = \frac{3}{2}$ و $w_1 < w_0$ و $v_1 > v_0$ منه :

نفترض أن $w_{n+1} < w_n$ و $v_{n+1} > v_n$

إذن ولكون g تزايدية على $]0; +\infty[$ فإن : $g(w_{n+1}) < g(w_n)$ و $g(v_{n+1}) > g(v_n)$

منه : $w_{n+2} < w_{n+1}$ و $v_{n+2} > v_{n+1}$

بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} w_{n+2} < w_{n+1}$ و $\forall n \in \mathbb{N} v_{n+2} > v_{n+1}$

أي أن (v_n) تزايدية وأن (w_n) تناقصية.

لدينا : $v_{n+1} - w_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{1+v_n}\right) - \left(2 - \frac{1}{1+w_n}\right) = \frac{1}{1+w_n} - \frac{1}{1+v_n} = \frac{v_n - w_n}{(1+v_n)(1+w_n)}$

منه : $(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} v_n \geq 1 \\ w_n \geq 1 \end{cases}$ فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq 1$ ولكون $\left| \frac{v_{n+1} - w_{n+1}}{v_n - w_n} \right| = \frac{1}{(1+v_n)(1+w_n)}$

منه : $(\forall n \in \mathbb{N}) |v_{n+1} - w_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |v_n - w_n|$ بالتالي : $\frac{1}{(1+v_n)(1+w_n)} \leq \frac{1}{4}$

يمكن أيضا استعمال مبرهنة التزايديات المنتهية، لكن سهولة الحساب تجعل هذه الطريقة أفضل.

باستعمال س ب) وبتعويض n بقيم متتالية وبضرب المتفاوتات المحصل عليها طرفا بطرف وبعد

الاختزال نجد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n) = 0$: منه $(\forall n \in \mathbb{N}) |v_n - w_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |v_0 - w_0|$

ولكون (v_n) و (w_n) إحداهما تزايدية والأخرى تناقصية فهما متحاذيتان

بما أن (v_n) و (w_n) متحاذيتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية ℓ ، إذن (u_n) متقاربة نهايتها ℓ

ولكون : $u_{n+1} = f(u_n)$ و f متصلة على $[1; +\infty[$ و $f([1; +\infty[) \subset [1; +\infty[$ فإن : $f(\ell) = \ell$

هذه المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر هو العدد الذهبي : $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

الاستنتاج هنا اعتمد على الخاصية : إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ و التي نبرهن عنها

باستعمال التعريف. (انظر الكتاب المدرسي ت ص 72 س 5)